فلسفة العلوم

المنطق الرياضي

الدكتور
ماهر عبد القادر محمد علي
كلية الآداب
جامعة الاسكندرية وجامعة بيروت العربية

الجزء الثالث

دار النهضة العربية
للطباعة والنشر
بيروت . ص.ب ١١٠٧٤٩

بيروت

١٤٠٥هـ - ١٩٨٥م

دار النهضة العربية

للطباعة والنشر

بيروت - لبنان - ص.ب: ١١٠٧٤٩

إهداء

إلى ياسر الحبيب إلى قلبي
الذي تحمل معي المشاق والصعاب
في سبيل رحلة العلم.

تقديم

المنطق الرياضي أحد الموضوعات الرئيسية التي شغلت علماء الرياضيات والمناطقة منذ أكثر من قرن ونصف من الزمان. واليوم ليست هناك قضية خلافية بين الباحثين على طبيعة الدراسة في هذا العلم، أو موضوعاته ونطاق أبحاثه.

وينسب الفضل الأكبر في بناء النسق التحليلي التركيبي لهذا العلم إلى العلامة الرياضي المنطقي برتراند رسّل الذي أثرى أبحاث العلم الوليد لأكثر من نصف قرن من الزمان، لذا أردنا أن نستعرض في القسم الأول من هذا المؤلف الارهاصات المنطقية السابقة على رسّل، ثم افضنا في الحديث عن نظريات المنطق الرياضي الأساسية حتي نقف على مدى ما انتهى إليه هذا العلم في العقد الثاني من هذا القرن.

ورأينا أن نتابع الحديث، في القسم الثاني، عن التطورات الحديثة التي جاءت بعد رسّل، فعرضنا لمواقف أربعة أساسية: اتجاه لويس نحو البحث في فكرة التضمن، وفكرة لوكاشيفتش عن المنطق المتعدد القيم، والموقف الصوري عند هلبرت، وأخيراً أردنا أن نثبت حركة التصحيح التي يتزعمها كواين في مجال المنطق الرياضي.

وأرجو أن يجد القارىء المتطلع لمعرفة المزيد عن المنطق الرياضي الفائدة المرجوة من هذا المؤلف.

ويطيب لي أن أشكر الأخوة مصطفى وحسان كريديه أصحاب دار النهضة العربية على اهتمامهما وما بذلاه من مجهود في سبيل إنجاز هذه الطبعة.

والله الموفق سواء السبيل،

ماهر عبد القادر محمد

بيروت - وايت بالاس
في ١٢ يونيو (حزيران) ١٩٨٤

القسم الاول

المنطق وتطوراته حتى ظهور

برنكيبيا ماتيماتيكا

الفصل الاول

على طريق تأسيس المنطق الرياضي
حتى النصف الأول من القرن التاسع عشر

١ - أرسطو وأفكار المنطق الصوري
٢ - الرواقية ومنطق الشرطيات
٣ - جورج بول والاتجاه الجبري في المنطق

كتب المنطقي الإنجليزي العلامة برتراند رسِّل في مؤلفه « مقدمة للفلسفة الرياضية » (١٩١٩) يصف الصلة بين المنطق والرياضيات قائلا : « وإذا كان هناك من لا يزالون لا يسلمون بالتطابق بين المنطق والرياضيات، فإننا نتحداهم أن يبينوا لنا عند أية نقطة في التعاريف والاستنتاجات المتتالية الموجودة في مبادىء الرياضيات، يعتبرون المنطق ينتهي عندها والرياضيات تبدأ منها »[١].

وفي عام ١٩٦١ كتب الدكتور عبد الحميد صبره في أول صفحات مقدمته لمؤلف يان لوكاشيفتش « نظرية القياس الأرسطية: من وجهة نظر المنطق الصوري الحديث »، يصف العلاقة بين المنطق الصوري والرياضي بقوله: « والذين يعارضون بين منطق أرسطو والمنطق الرياضي إنما يسيئون فهم العلاقة بينهما. فالمنطق الرياضي ليس جنساً آخر من المنطق يباين المنطق الأرسطي، وإنما هو منطق صوري في ثوب جديد؛ وقد كان أرسطو أول من وضع أسس المنطق الصوري حينما صاغ في القرن الرابع قبل الميلاد نظريته في القياس »[٢].

---

(١) برتراندرسل؛ مقدمة للفلسفة الرياضية، الترجمة العربية، ص ٢٧٧.

(٢) يان لوكاشيفتش؛ نظرية القياس الأرسطية من وجهه نظر المنطق الصوري الحديث، الترجمة العربية، ص ٧.

معنى هذه الآراء أن المنطق الرياضي المعاصر لا يعتقد ابتداءً في بطلان المنطق الصوري، وإنما يعتقد أن المنطق الصوري قد خضع للتطور العلمي الذي وضعه في صورة دقيقة، ويعتقد أيضاً أن الصلة بين المنطق والرياضيات قوية، وأنه من وجهة النظر المعاصرة لا يمكن الفصل بين ما هو منطق وما هو رياضيات.

والواقع أنه مهما كان الرأي حول حقيقة المنطق الرياضي، فإن أرسطو ومنطقه الصوري يعد نقطة البدء الحقيقية في أي بحث منطقي. ويمكن أن نتبين حقيقة هذا الرأي ابتداء من منطق أرسطو.

١ ـ أرسطو وأفكار المنطق الصوري

نعلم أن أرسطو تلقى علومه في الأكاديمية على أستاذه أفلاطون إبان دور النشأة والتكوين، فنهل عن أفلاطون بقدر ما استطاع. ونعلم أيضاً أن دوراً كبيراً كان يعطى للرياضيات في الأكاديمية، بل إن أفلاطون كان يجد في الإستدلال الرياضي خير معين في البرهنة على وجود عالم المثل. وقد استعار أفلاطون المنهج الرياضي من الفيثاغوريين، وطبق منهجهم الفرضي، وتمسك بضرورة دراسة الفيلسوف للرياضيات، وهذا يفسر لنا الشعار الذي وضعه على باب الأكاديمية وكتب فيه «لا يدخل هنا إلا من كان رياضيا»[١]. فكأن أرسطو «نشأ منذ البداية نشأة فكرية ذات طابع رياضي، ومن ثم فإن معرفة أرسطو بالرياضيات السائدة في عصره، ودوره وعلماء الليسيه في تقدمها وجمعها، وبصفة أخص تحليله هو نفسه لأسسها وأصولها مما تجمعه كلمة المنهج الرياضي أمر لا مجال للشك فيه»[٢]. إلا أن أرسطو حينما أخذ يستقل بفكره

(١) الدكتور محمد علي أبو ريان؛ تاريخ الفكر الفلسفي، حـ ١، ص ١٤٣.

(٢) الدكتور محمد ثابت الفندي؛ فلسفة الرياضيات، ص ٤٣.

عن الفكر الأفلاطوني وجد أن نظرية المثل التي عكف على نقدها، إذا جردت من ردائها الرياضي أصبح من السهل تفنيدها ورفضها على أسس منطقية بحته، وإنه حرصا منه على الاستقلال حتى عن المنهج الأفلاطوني لم يُعر الرياضيات أهمية مباشرة، ومع هذا فقد استخدمها بصورة غير مباشرة، حيث إستند إليها في نظرياته المنطقية، وبين أن اليقين الذي تمتاز به قضايا الرياضة ونظرياتها. إنما هو « مستمد من أنها علم برهاني أو كما يقال الأن علم استنباطي أو نظرية أكسيوماتيكية »[1]، وهذا يؤكد لنا حقيقة هامة أدركها أرسطو أيضا وهي أنه كان على بينه بأسس وأصول النسق الاستنباطي Deductive System.

لقد ذهب ارسطو في الكتاب الأول من التحليلات الأولى إلى تعريف القياس بصورة عامة قائلا: « هو قول متى قررت فيه أشياء معينة نتج عنها بالضرورة شيئاً آخر مختلف عما سبق تقريره »[2]، ثم ميز بين نوعين من القياس: التام Perfect والناقص Imperfect بقوله: « القياس التام هو الذي لا يتطلب في بيان ما يجب عن مقدماته إلى تقرير شيء غيرها؛ والقياس الناقص هو الذي يتطلب في بيان ذلك تقرير شيء أو أشياء مما يجب عن مقدماته، ولكن هذه الأشياء لم تكن مقررة في المقدمات »[3]. وعلى أساس هذا التمييز حدد أرسطو صورة القياس بدقة في نهاية الكتاب الأول من التحليلات الأولى، قائلا: « إن كل برهان وكل قياس يتقدم إبتداء من ثلاثة حدود فقط، وهذا بين بذاته، فمن الواضح أن النتيجة القياسية تنتج من مقدمتين، وليس أكثر من ذلك؛ لأن الحدود الثلاثة تؤلف مقدمتين، إذا لم تفترض

---

(١) المرجع السابق، ص ٤٣.

(٢) Aristotle, Analytica Priora, Book. 1, 24 b 20

(٣) Ibid, Book. 1, 24 b 22

مقدمة جديدة »[1]. وفي هذا التعريف الأخير ينص أرسطو صراحة على أن القياس يتألف من عناصر أساسية هي:

أ - الحدود الثلاثة: الأكبر **Major** والأصغر **Minor** والأوسط **Middle**.

ب - المقدمتين وهما: المقدمة الكبرى **Major premiss** والمقدمة الصغرى **Minor premiss**.

جـ - النتيجة **Conclusion** وتلزم عن المقدمتين وترتبط بهما ارتباطا ضروريا. ويمكن لنا أن ننظر في صورة القياس العامة من خلال المثال الآتي:

كل حيوان فان
كل إنسان حيوان
∴ كل إنسان فان

نلاحظ من صورة القياس العامة التي أمامنا أن النتيجة التي توصلنا إليها تنتج ضرورة عن اجتماع المقدمتين، أو الارتباط بينهما. والضرورة التي يعنيها أرسطو إنما هي الضرورة المنطقية **Logical necessity**، فالحد الأوسط يمثل رابطة مشتركة بين الحد الأكبر والحد الأصغر بما يظهرهما معا في النتيجة، وبذا فإن النتيجة منطقياً متضمنة في المقدمات.

وينبغي أن نلاحظ أيضاً أن أرسطو في معالجته للقياس يلجأ إلى استخدام الرموز **Symbols**، والتحليلات تكشف عن ذلك بوضوح تام. فإذا أشرنا للحدود « حيوان » و « فان » و « إنسان » بالرموز أ، ب، جـ على التوالي اتخذ القياس الصورة الآتية:

---

(١) **Ibid, Book. 1, 42a. 30 - 35**

كل أ هي ب

كل جـ هي أ

∴ كل جـ هي ب

ونحن نشير إلى الرموز أ، ب، جـ في الرياضيات بأنها متغيرات Variables، وهنا تكمن أهمية أرسطو، فكما يقول المنطقي البولندي المعاصر «يان لوكاشيفتش»: «إن إدخال المتغيرات في المنطق من أعظم مبتكرات أرسطو»[(١)]. وسواء أكان أرسطو قد اعتبر كشفه هذا بديهياً أم لا، فإن المدرسيين ومناطقة العصور الوسطى لم يدركوا أهمية هذا الكشف العظيم الذي أشار إليه الإسكندر الإفروديسي ويوحنا الفيلوبوني حينما شرحا فلسفة أرسطو ومنطقه. لكن المناطقة في القرن العشرين أدركوا أهمية أرسطو في هذه الناحية، حتى أن بعضهم يعتبره مؤسس المنطق الصوري الحديث[(٢)].

وفضلا عن فكرة المتغيرات التي أمدنا بها أرسطو في منطقه، فقد زودنا بنظرية هامة في الثوابت المنطقية[(٣)] Logical Constants ومن أهمها (و)، (إذا)، (ينتمي إلى كل)، (ينتمي إلى لا واحد)، (ينتمي إلى بعض)، (لا ينتمي إلى بعض). إلا أن أرسطو في هذا الجانب بالذات لم يمضي في تحليلاته على أساس رياضي.

لكن الفكرة الهامة فيما يتعلق بالثوابت المنطقية وإستخدام أرسطو لها، تتمثل في إدراك أرسطو لفكرة التضمن Implication واستخدامها في صياغة

(١) يان لوكاشيفتش؛ المرجع السابق، ص ٢١.

(٢) Mourant, J. A., **Formal logic**, P. 212

اننا نلاحظ أن المناطقة من أصحاب النزعة الرياضية في المنطق يذهبون إلى أن المنطق الرياضي هو المنطق الصوري ذاته، ومن ثم فإنهم حين يتحدثون عن المنطق الصوري يقصدون الرياضي في آخر اشكاله تطورا.

(٣) يان لوكاشيفتش؛ المرجع السابق، ص ٢٧.

القياس. فقد كشف لوكاشيفتش أن أرسطو « صاغ أقيسته جميعاً على أنها قضايا لزومية يتألف مقدمها من المقدمتين ويكون تاليها هو النتيجة »[١]، وهذا يبدو بوضوح من صياغة القياس على الصورة التالية « إذا كان ق و ك فإن ل »، حيث ق و ك هما المقدمتين، ل هي النتيجة، فالقضية المركبة من « ق و ك » هي المقدم، والنتيجة ل هي التالي.

على هذا النحو نرى بوضوح أن الأبحاث المنطقية المعاصرة ترى في فكر أرسطو المنطقي جوانب منطقية هامة تنتمي للمنطق الرياضي، لكن مناطقة العصور الوسطى لم يدركوا حقيقة الفكر الأرسطي في هذا الجانب، وفضلوا حصر أبحاثهم فيما يسمى بالقضية الحملية Categorical Proposition ذات صورة « الموضوع ـ المحمول » Subject - Predicate على ما يقول رسّل، وبذلك ظل الجزء المتطور من البحث المنطقي الأرسطي في طي النسيان، حتى تبيّن للمناطقة ـ منذ أواخر القرن التاسع عشر ـ أهميته وعملوا على تطويره من خلال التحليل المنطقي Logical Analysis.

٢ ـ الرواقية ومنطق الشرطيات

للمدرسة الرواقية[٢] نظرات خاصة في المنطق ابتداء من ذلك الهجوم

---

(١) يان لوكاشفتش، المرجع السابق، ص ١٤.

(٢) يلاحظ أن الاتجاه إلى الجزئي لدى الرواقية جاء وليد دواعٍ عملية، فزينون الرواقي وكريزيب وغيرهما من الرواقيين اكثروا من الكتابة في الأمراض، ومن ثم جاءت نظرية المعرفة لديهم متأثرة بهذا الجانب التجريبي. وتجدر الإشادة هنا بالبحث الرياضي المنطقي الذي قدمه تلميذي السيد / أحمد أنور للحصول على درجة الماجستير في العام الماضي، حيث تناول بصورة دقيقة فكرة التضمن في أنساق المنطق الرياضي، وكان أن عرض للنسق المنطقي للرواقية بصورة تحليلية تركيبية رائعة، وكشف النقاب عن حقيقة الموقف المنطق لهذه المدرسة وفق آخر التحليلات العلمية المعاصرة.

العنيف على المنطق الصوري الأرسطي لاحتواء القضية الحملية على الحدود الكلية Universal Terms . إن هؤلاء لا يعترفون بالكليات لأنهم يلجئون إلى الواقع الخارجي المحسوس الذي يتحقق فيه الجزئي فحسب، كما أن معرفة الصدق Truth والكذب Falsehood عندهم تكون بالإشارة إلى المحسوس العياني، لكن المجرد والكلي لا يدخل ضمن دائرة المعرفة المنطقية عندهم. فالمعرفة وفق الاتجاه الرواقي تأتي من الأثر الحاصل عندنا من موضوع خارجي، الذي هو الصورة Image . فكأن المعرفة ككل تتألف من الصورة الآتية من الخارج، ثم من القول المعبر عن تلك الصورة، والذي هو تعبير عنها بكل ما هو فيها من جزئي وشخصي. ومن ثم فالأقوال كلها مخصوصة، كما تصورتها هذه المدرسة؛ لأنهم أعداء لكل ما هو كلي، وهذا يتفق مع نزعتهم الحسية. ولذا نجدهم يستخدمون لفظ الإشارة مثل «هذا» ليشيروا به إلى الجزئي.

لقد صنف الرواقيون القضايا إلى قمسين كبيرين: القسم الأول ويضعون فيه كل القضايا البسيطة. أما القسم الثاني فيشمل كل أنواع القضايا المركبة. والقضية البسيطة في النسق الرواقي تقابل القضية الذرية Atomic Proposition في النسق اللوجستيقي. أما القضية المركبة فتقابل القضية الجزيئية Molecular Proposition في اللوجستقا.

والقضية البسيطة هي التي نحمل فيها صفة من الصفات على موضوع من الموضوعات دون حاجة إلى رابطة منطقية Logical Connection ، وللقضية من هذا النوع ثلاث صور[1]:

١ - قد يكون الموضوع معينا Definite مشار إليه مثل «هذا».

٢ - وقد يكون الموضوع غير معين Indefinite مثل «بعضهم».

(١) الدكتور عثمان أمين، الفلسفة الرواقية، ص ١٣٢.

٣ ـ أو قد يكون شبه معين Intermediate مثل « سقراط ».

وأهم ما نلاحظه على هذه الصور للقضية البسيطة أن المحمول فيها « هو دائماً فعل أي حدث، وشيء يحصل للموضوع »(١).

أما القسم الثاني والذي يضعون فيه تصنيفاً للقضايا المركبة ـ أو ما يعرف حديثا بالقضايا الجزيئية التي تعتمد على الثوابت المنطقية ـ فإنه يُعدُّ مجالاً خصباً لوضع الأسس المنطقية للأبحاث الحديثة. فالقضايا المنطقية عندهم تتميز بأنها « تكاد تكون دائماً قضايا مركبة شرطية: متصلة أو منفصلة »(٢)، ولا شك أن الرواقيين قد أدركوا الأسس المنطقية التي تستند إليها القضايا من هذا النوع، ومن ثم قطعوا شوطاً كبيراً في دراسة هذه القضايا، قبل أن يتوصل المناطقة في نهاية القرن التاسع عشر إلى حقيقة هذه القضايا.

والقضايا المركبة عند الرواقية تتخذ الصور الآتية: الإثبات بالإثبات، النفي بالنفي، النفي بالإثبات وله صورتان، الإثبات بالنفي.

أ ـ صورة الإثبات بالإثبات Modus Ponendo Ponens

« إذا كان الأول فإن الثاني، لكن الأول ∴ الثاني »

وهذه الصورة يمكن وضعها رمزياً كما يلي:

إذا كانت ق فإن ك	If p then q
لكن ق	p
∴ ك	∴ q

(١) المرجع السابق، نفس الموضع.

(٢) المرجع السابق، ص ١٣٣.

ب ـ صورة النفي بالنفي **Modus Tollendo Tollens**

« إذا كان الأول فإن الثاني، لكن ليس الثاني ∴ ليس الأول ». والقضية من هذا النوع تتخذ الصورة الرمزية التالية:

إذا كانت ق فإن ك	if p then q
لكن ليست ك	$\sim q$
∴ ليست ق	$\therefore \sim p$

جـ ـ صورة النفي بالاثبات **Modus Ponendo Tollens**

الحالة الأولى: « ليست الحالة أن الأول والثاني معا، لكن الأول ∴ ليس الثاني » وصورته الرمزية:

ليست ق و ك معا	$\sim p \,.\, q$
لكن ق	p
∴ ليست ك	$\therefore \sim q$

الحالة الثانية: « إما أن يكون الأول أو الثاني، لكن الأول ∴ ليس الثاني » وصورته الرمزية:

إما ق أو ك	$p \vee q$
لكن ق	p
∴ ليست ك	$\therefore \sim q$

د ـ صورة الاثبات بالنفي **Modus Tollendo Ponens**

« إما أن يكون الأول أو الثاني، لكن ليس الثاني ∴ الأول »، وصورته الرمزية.

إما ق أو ك	$p \vee q$
لكن ليست ك	$\sim q$
∴ ق	$\therefore p$

إننا نلاحظ أن وضع القضايا على هذه الصورة الشرطية ارتبط بفهم دقيق للثوابت المنطقية، مثل الوصل Conjunction والفصل Disjunction والتضمن Implication ، وهذا ما نجده في المنطق الرواقي بصورة أكثر دقة من المنطق الصوري. وبالتالي كشف المنطق الرواقي عن صلات وثيقة باللوجستيقا المعاصرة، الأمر الذي جعل للمنطق الرواقي منزلة الصدارة في العصر الحديث بما جعله يتفوق على المنطق الصوري الأرسطي[١].

٣ - جورج بول والاتجاه الجبري في المنطق

يعتبر جورج بول[٢] G. Boole (١٨١٥ - ١٨٦٤) أول رياضي يكون فكرة دقيقة عن الحساب المنطقي الرمزي في كتاباته التي من أهمها « التحليل الرياضي للمنطق » (١٨٤٧) The Mathematical Analysis of logic و « بحث في قوانين الفكر » (١٨٥٤) An Investigation of The Laws of Thought لقد كتب بول في المقدمة التي كتبها لمؤلفه « بحث في قوانين الفكر » يقول: إن أي إنسان على درجة من الوعي بالموقف الراهن في الجبر المنطقي

(١) الدكتور محمد ثابت الفندي، أصول المنطق الرياضي، ص ١٢٨ - ١٢٩.

(٢) من أهم المراجع التي استعنا بها في تدوين هذه الفقرة عن بول ما يلي:

Boole, G., An investigation of the laws of Thought, London, 1854.

Adler, Probability and Everyman, Dobson, 1963.

Whitesitt, Boolean Algebra and its Application, Addisonwesley, 1962.

Breuer, Introduction to the Theory of sets, Prentic Hall, 1958.

Lipschuts, Set Theory and related topics, schaum. 1964.

Stoll, Sets, Logic and axiomatic theories, Freeman, 1961.

Kneal, W. & Kneale. M, The Development of Logic, London. 1964.

يعرف تماما أن صحة الإجراء في التحليل لا يعتمد على تفسير الرموز وإنما يعتمد على القواعد التي تحكم تآليفاتها. فأي نسق من أنساق التفسير مسموح به طالما أنه لا يتداخل مع العلاقات المفترضة. ومن ثم فإن الإجراء التحليلي يمكن عرضه في صيغة من صيغ التفسير لحل المشكلات المتعلقة بخصائص معينة للأعداد..

إن من أهم مميزات الحساب المنطقي البولي أنه يستند إلى استخدام الرموز بالإضافة إلى قواعد تآليف تلك الرموز؛ ولذا فإن بول يميز بين قسمين في إطار الحساب المنطقي، وهما معا يؤلفان ما يطلق عليه جبر المنطق البولي Boolean Logical Algebra: حساب الفصول Calculus of Classes وحساب القضايا Calculus of Propositions. ومن خلال القسمين تبدو نظرة بول الحسابية على اعتبار أنه يستخدم علم العدد كنموذج لحسابه المنطقي؛ ولذا فإنه قبل أن نشير إلى هذين القسمين لا بد وأن نقف على الرموز التي يستخدمها بول في حسابه الجبري المنطقي.

رموز العمليات عند بول

يضع بول مجموعة من الرموز الأساسية التي يستخدمها في إجراء عملياته الاستنباطية التحليلية، وهي:

١ - يرمز للأشياء أو الموضوعات بالرموز z, y, x التي تمثل الفصول.

٢ - يرمز للعمليات الرياضية بالرموز +، −، ×، ÷ وهي بمثابة الثوابت المنطقية Logical Constants. ووظيفة هذه الرموز أنها تؤدي إلى تأليف تصورات جديدة ابتداء من التصورات التي لدينا.

٣ - يضع رمزاً لعلاقة الذاتية Identity وهو علامة المساواة « = » المستخدمة في الجبر العادي Ordinary Algebra.

٤ ـ يشير للفصل الكلي Ualversal Class بالقيمة (1) الذي يمثل فصول كل الأشياء المتصورة باستقلال تام عما إذا كانت هذه الأشياء موجودة في الواقع أم لا.

٥ ـ يرمز للفصـل الفـارغ Empty Class أو اللاوجـود بـالقيمـة (0). والفصل الفارغ هو الفصل الذي عضوه لا شيء.

٦ ـ إذا قلنا أن x = x فإن هذا يعني أن «x متطابقة مع x».

٧ ـ يرمز للاحتواء Inclusion بالعلامة (⊂) التي تعبر عن احتواء فصل في آخر.

٨ ـ يضع رمزا لانتماء فرد individual إلى فصل معين، وهذا هو ما يطلق عليه رمز الانتماء (ε) Belonging. فإذا كان a فرد في الفصل A أمكننا أن نعبر عن هذه الخاصية بالصيغة

a ε A

التي تعني أن:

a belongs to A

٩ ـ يرمز لاتحاد الفصول أو المجموعات بالرمز (∪) الذي نقرأه Unlon.

١٠ ـ يرمز للتقاطع بين الفصول أو المجموعات بالرمز (∩) الذي نقرأه Intersection.

١١ ـ يرمز للاحتواء التام Proper Inclusion بالعلامة (⊆). فاذا قلنا أن A ⊆ B فإن هذا يعني أن الفصل A محتوي في الفصل B، أي أن أعضاء الفصل A هي ذاتها أعضاء في الفصل B. فإذا لم يكن أحد أعضاء الفصل A عضواً في الفصل B فإنه ليس من الصادق أن الفصل A محتوى في الفصل B.

كذلك يشير بول إلى أن الحاصل xy يعني أننا قمنا باختيار لعدد معين من الأفراد x في الفصل X ولعدد معين من الأفراد y في الفصل Y ، وهكذا ينتج لدينا فصل جديد ، وهذا الفصل هو ما يطلق عليه دالة الاختيار Selection function ومن ثم فإن أي معادلة يكون أعضاؤها دالة اختيار هي معادلة اختيار Selection equation . وهنا فإن بول يضع ثلاث قواعد أساسية للاختيار هي :

القاعدة الأولى : أن نتيجة الاختيار مستقلة تماما عن تصنيف الأشياء في مجموعات.

القاعدة الثانية : أن الترتيب الذي نقوم فيه بعمل اختيارين هو ترتيب مختلف.

القاعدة الثالثة : أن نتيجة فعل الاختيار ـ التي تتكرر مرات عديدة وفق رغبتنا ـ متطابقة مع فعل العملية الأولى : مثال ذلك :

$$x x = x$$

$$x^2 = x$$

أو بالنسبة للعدد n من العمليات فان

$$x^n = x$$

ووفق هذه القواعد الثلاثة يصبح اختيار الرموز عند بول توزيعياً distributive وتبادلياً Commutative . ويمكن لنا أن نمثل لفكرة الحاصل xy عند بول بالمثال الآتي : افترض أن x تمثل كل الأشياء من نفس النوع ولتكن الحيوانات ذات القرون، وأن y تمثل كل الأشياء من نوع آخر ولتكن الخراف. إذن حاصل الضرب المنطقي xy يرمز للخراف ذات القرون، (x – 1) يرمز للحيوانات التي ليست ذات قرون، (y – 1) يرمز

للخراف التي ليست ذات قرون، ومن ثم فإن

$$(1 - x)\ (1 - y)$$

هو فصل كل الأشياء التي ليست خراف وليست ذوات قرون.

لقد حاول بول أن يطبق هذه الفكرة على القضايا. فالقضية في رأي بول إما أنها صادقة أو كاذبة. فاذا أشرنا إلى اختيار الصدق بالرمز x، والى اختيار الكذب $(1 - x)$، وافترضنا أن لدينا قضيتين x، y فإنه يمكن لنا أن نحدد القضايا والتعبيرات عن الاختيار كما يلي:

حالات القضايا	التعبيرات عن الاختيار
x صادقة ، y صادقة	xy
x صادقة ، y كاذبة	$x(1 - y)$
x كاذبة ، y صادقة	$(1 - x)\ y$
x كاذبة ، y كاذبة	$(1 - x)\ (1 - y)$

إن بول يرى أن الاختيار فيما يتعلق بالفصول يتم في صورتين أساسيتين هما صورتا قانون التوزيع وقانون التبادل. ويعني قانون التوزيع The distributive law عند بول أنه إذا كانت لدينا مجموعتان فرعيتان x، y لمجموعة كلية (1) فإن:

$$x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z) \qquad (1)$$

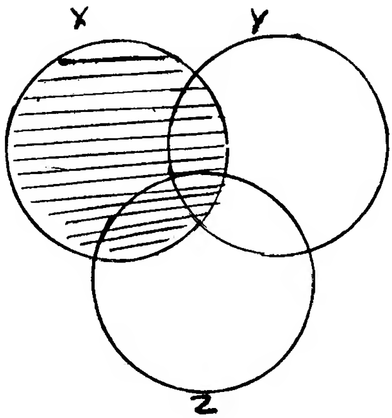
وكذلك فان

$$X \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z) \qquad (2)$$

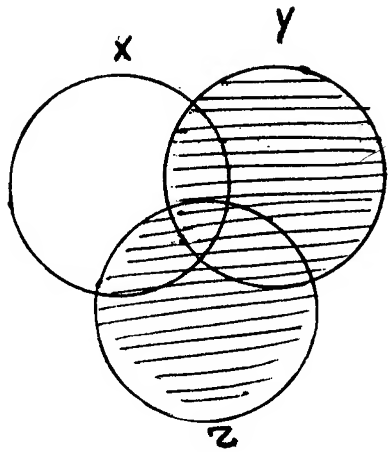
وهذه القوانين هي مما يمكن البرهنة عليه. افترض أننا أردنا أن نبرهن على الصورة الثانية.

البرهان:

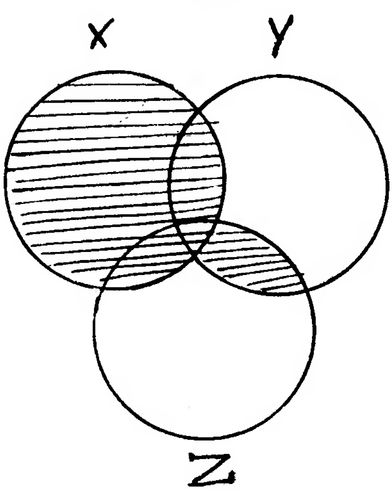
نرسم أشكال فن [١] Venn diagrams لكل أجزاء هذا القانون كما يلي:



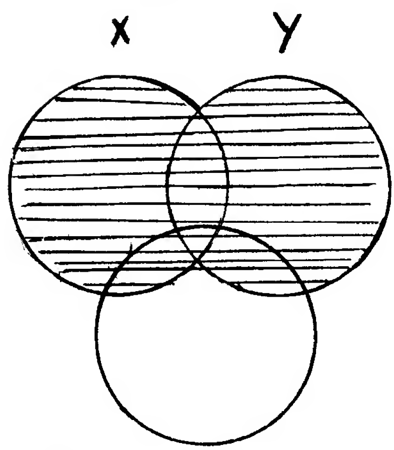
(a) x



(b) y ∪ z

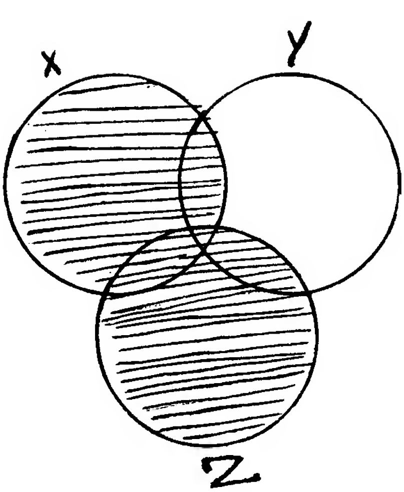


(c) x ∪ (y ∩ z)

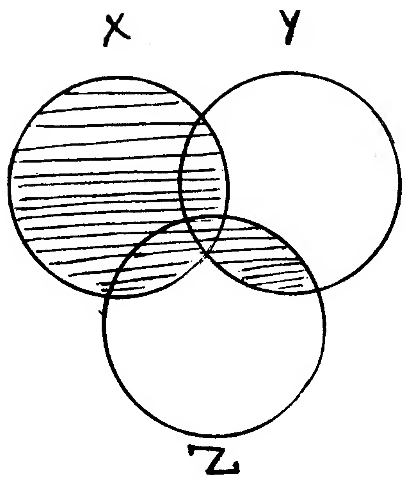


(d) x ∪ y

(١) لم يستخدم بول أشكال فن للتعبير عن أفكاره، بل ولم يستخدم الأمثلة الواردة في هذه الفقرة أصلا. ولكننا رأينا أنه من الأفضل أن نحاول تطبيق أفكار بول الأساسية عن طريق أمثلة عملية تبدو فيها أهمية أفكاره، وحاولنا توضيح المثال باستخدام أشكال فن المألوفة على اعتبار أنها تقرب إلى ذهن القارىء النموذج التصوري للحل.



(e) $x \cup z$



(f) $(x \cup y) \cap (x \cup z)$

افترض أن a أي عنصر في المجموعة $x \cup (y \cap z)$، أي أن $a \in x \cup (y \cap z)$، إذن بسبب طبيعة اتحاد a كعنصر في x أو $y \cap z$ أو في كليهما كما هو مبين في الشكلين الاول والثاني، فانه:

إذا $a \in x$ إذن $a \in x \cup y$ وأيضاً فان a ينتمي إلى $x \cup z$.

وإذا كانت a عنصراً في المجموعتين فإنها أيضاً تصبح عنصراً في تقاطعهما.

، $\therefore a \in x$ ،

$\therefore a \in (x \cup y) \cap (x \cup z)$

، $\therefore$ a ينتمي إلى الطرف الأيمن وينتمي في نفس الوقت إلى الطرف الأيسر

$\therefore x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z)$

أما قانون التبادل فإن بول يقدم صياغته التالية في صورتين:

الصورة الأولى: باستخدام الاتحاد

$$x \cup y = y \cup x$$

الصورة الثانية: باستخدام التقاطع

$$x \cap y = y \cap x$$

إنه إذا كانت n (x) تشير إلى عدد العناصر في المجموعة x ، n (y) تشير إلى عدد العناصر في المجموعة y ، فإن:

$$n\ (x \cup y) = n\ (x) + n\ (y) - n\ (x \cap y)$$

ونحن نلاحظ هنا أن هذه النتيجة تنتج بصورة مباشرة من تعريف الاتحاد ؛ لأن اتحاد مجموعتين x ، y هو مجموعة كل عناصر x مع كل عناصر y بالاضافة إلى العناصر المشتركة التي تشملها x ، y. أما إذا لم تكن هناك عناصر مشتركة بين المجموعتين فإن عدد العناصر في اتحاد هاتين المجموعتين يكون هو نفس عدد العناصر في كل مجموعة، أي أن:

$$n\ (x \cup y) = n\ (x) + n\ (y)$$

ومن جانب آخر فإذا كان هناك m من العناصر المشتركة، فإن n (x) + n (y) يشتمل على العناصر m مرتين وبالتالي لا بد من طرح m.

أمثلة تطبيقية

المثال الأول:

عدد الطلاب في فصل دراسي ٥٠ طالباً، منهم ٢٠ يدرسون الفيزياء، ٤٠ يدرسون الرياضيات. وضح باستخدام الاتحاد والتقاطع كم طالباً يدرس الرياضيات والفيزياء معاً؟

الحل

افترض أننا رمزنا بالرمزين x ، y لمجموعة من الطلاب الذين يدرسون الرياضيات والفيزياء على التوالي.

∴ $y \cap x$ هي مجموعة الطلاب الذين يدرسون الرياضيات والفيزياء، وكذلك فإن $y \cup x$ هي مجموعة الطلاب الذين يدرسون الرياضيات أو الفيزياء أو كلتيهما، ومن ثم فإن:

$$n(x \cup y) = 50 \;,\; n(x) = 40 \;,\; n(y) = 20$$

وباستخدام قانون عدد العناصر في المجموعة الذي ينص على أن:

$$n(x \cup y) = n(x) + n(y) - n(x \cap y)$$

ينتج أن:

$$50 = 40 + 20 - n(x \cap y)$$

∴ عدد الطلاب الذين يدرسون الرياضيات والفيزياء معاً ١٠ طلاب.

المثال الثاني:

في كلية من الكليات يدرس الرياضيات ٢٣ طالباً؛ ويدرس الفيزياء

١٩ طالباً ، و ١٣ طالباً يدرسون الكيمياء . ومن بين هؤلاء جميعاً يدرس الفيزياء والرياضيات معاً ١٣ طالباً ، ويدرس ٧ طلاب الفيزياء والكيمياء ، ٩ طلاب يدرسون الرياضيات والكيمياء ، ٤ طلاب فقط يدرسون كل هذه العلوم . كم طالباً في هذه الكلية ؟ وكم طالباً يدرس موضوعاً واحداً من بين هذه الموضوعات ؟

الحل

نرمز لمجموعة الطلاب الذين يدرسون الرياضيات بالرمز **M**

ونرمز لمجموعة الطلاب الذين يدرسون الفيزياء بالرمز **P**

ونرمز لمجموعة الطلاب الذين يدرسون الكيمياء بالرمز **C**

∴ مجموع الطلاب الذين نريد الحصول عليه تمثله الصيغة

$$n(M \cup P \cup C)$$

∵ ، $n(M) = 32$

، $n(P) = 19$

، $n(C) = 13$

، $n(M \cap P) = 13$

، $n(P \cap C) = 7$

، $n(M \cap P \cap C) = 9$

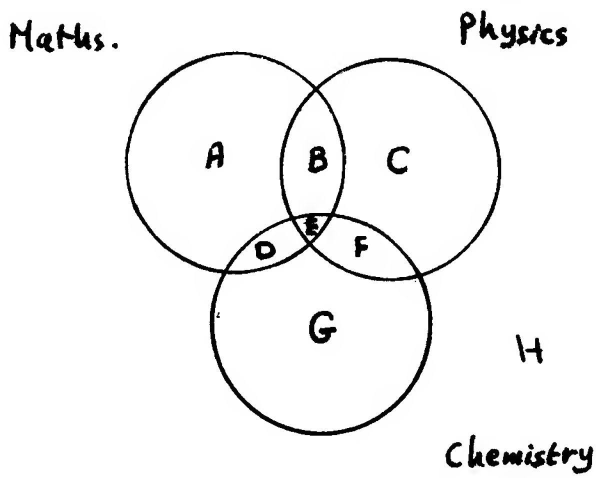
، $n(M \cap P \cap C) = 4$

∴ ينتج أن

$$n(M \cup P \cup C) = 23 + 19 + 13 - 13 - 7 - 9 + 4 = 30$$

وبذلك يكون عدد طلاب الكلية ٣٠ طالباً .

أما الجزء الثاني من المسألة والذي يطلب منا أن نستخرج عدد الطلاب الذين يدرسون الرياضيات والفيزياء ولا يدرسون الكيمياء . ، وعدد الطلاب الذين يدرسون موضوعاً واحداً فقط، فإنه يمكن التوصل إليه باستخدام أشكال فن كما يوضحه الشكل الآتي:



نلاحظ أن B في الشكل الذي أمـامنـا تمثـل الطلاب الذيـن يـدرسـون الرياضيات والفيزياء ولا يدرسون الكيمياء. ومن الواضح أن

$$n\ (B) = n\ (M \cap P) - n\ (M \cap P \cap C)$$

$$= 13 - 4 = 9$$

∴ هناك ٩ طلاب يدرسون الرياضيات والفيزياء ولا يدرسون الكيمياء .

أما عدد الطلاب الذين يدرسون موضوعاً واحداً فقط تتمثله المساحات A ، C ، G ولكن نلاحظ أن:

$$n\ (A) = n\ (M \cup P \cup C) - n\ (P \cup C)$$

$$n\ (C) = n\ (M \cup P \cup C) - n\ (M \cup C)$$

$$n\ (G) = n\ (M \cup P \cup C) - n\ (M \cup P)$$

ومن ثم فإن عدد الطلاب الذين يدرسون موضوعاً واحداً هو

$$n(A) + n(C) + n(G) = 3\,n(M \cup P \cup C) - n(P \cup C) - n(M \cup C) - n(M \cup P)$$

$$\therefore n(A) + n(C) + n(G) = 3\,n(M \cup P \cup C) - 2\,n(P) - 2\,n(C) - 2\,n(M) + n(P \cap C) + n(M \cap C) + n(M \cap P)$$

$$= 3 \times 30 - 2 \times 19 - 2 \times 13 - 2 \times 23 + M + 9 + 13$$

$$= 9$$

∴ عدد الطلاب الذين يدرسون موضوعاً واحداً فقط ٩ طلاب.

لكن هل يمكن صياغة الجبر البولي على هيئة نسق استباطي[1]؟ أو بمعنى آخر، هل يمكن البرهنة على بعض القوانين المنطقية والرياضية ابتداء من مسلمات يتضمنها الجبر البولي؟

إنه يمكن أن نحدد أربع مسلمات أساسية يتضمنها الجبر البولي، لأننا إذا اعتبرنا أن B مجموعة واستخدمنا بعض الثوابت البولية مثل « + »، « • » فإنه ينتج عن ذلك المسلمات الآتية:

(١) أفكار بول الأساسية لم توضع في نسق استنباطي: كان بول على وعي تام بفكرة النسق الاستنباطي ويوضح هذا النص الذي يذكره في مقدمة « بحث في قوانين الفكر » ويقول فيه: « إن صحة الإجراء في التحليل لا يعتمد على تفسير الرموز وإنما يعتمد على القواعد التي تحكم تآليفها ». وقد حاولنا أن نستخلص مقدمات النسق الاستنباطي عند بول ونرتبها بصورة تبدو إلى حد ما قريبة من النسق. كذلك أوردنا البراهين على النظريات والمصادرات وهذا ما لم يرد أصلا في مؤلفات بول، ولكن البرهان الذي قدمناه في كل حالة تطبيق مباشر لأفكار بول.

المسلمة الأولى قانون التبادل The commutative law

a «+» b = b «+» a

a «.» b = b «.» a

حيث a ، b عنصران في المجموعة B

المسلمة الثانية قانون التوزيع The distrbutive law

a «.» (b «+» c) = (a «.» b) «+» (a «.» c)

a «+» (b «.» c) = (a «+» b) «.» (a «+» c)

حيث a, b, c عناصر في المجموعة B

المسلمة الثالثة الصفر والواحد عناصر

في المجموعة B لدينا عنصرين Ø ,I ولهما الخصائص الآتية:

a «+» Ø = a

a «.» I = a

حيث a عنصر في المجموعة B

المسلَّمة الرابعة التتام Complementation

a «+» b = 1

a «·» b = Ø

ويمكن أن نضع á بدلا من b على النحو الآتي:

a + á = I

a «.» á = Ø

والآن يمكن البرهنة على بعض القوانين المنطقية ابتداءً من هذه المسلمات الأربعة، وهذه القوانين ليست قوانيناً بالمعنى المألوف، وإنما هي تعد بمثابة مصادرات يمكن البرهنة عليها، ويمكن استخدامها في البرهنة على قوانين أشد منها تركيباً وأكثر تعقيداً.

المصادرة الأولى قوانين تحصيل الحاصل **Laws of Tautology**

بالنسبة لأي عنصر وليكن a في نسق الجبر البولي B فإن:

$$1 - \; a \cdot a = a$$

،

$$2 - \; a + a = a$$

البرهان

مسلمة ٣	$1 - \; a + a = (a + a) \cdot 1$
مسلمة ٤	$= (a + a) \cdot (a + a')$
مسلمة ٢	$= a + a \cdot a'$
مسلمة ٤	$= a + \emptyset$
مسلمة ٣	$= a$
مسلمة ٣	$2 - \; a \cdot a = a \cdot a + \emptyset$
مسلمة ٤	$= a \cdot a + a \cdot a'$
مسلمة ٢	$= a \cdot (a + a')$
مسلمة ٤	$= a \cdot 1$
مسلمة ٣	$= a$

المصادرة الثانية بالنسبة لأي عنصر a في نسق الجبر البولي B فان:

$$a + I = I$$

،

$$a \cdot \emptyset = \emptyset$$

البرهان

مسلمة ٣، ١	$a + I = I \cdot (a + I)$
مسلمة ٤	$= (a + a') \cdot (a + I)$
مسلمة ٢	$= a + a' \cdot I$
مسلمة ٣	$= a + a'$
مسلمة ٤	$= I$

وكذلك يمكن البرهنة على أن $a \cdot \emptyset = \emptyset$ باستخدام مبدأ الثنائية.

المصادرة الثالثة قانون الامتصاص Law of absorption

بالنسبة لأي زوج من العناصر a، b في نسق الجبر البولي B فإن:

$$a + a \cdot b = a$$

،

$$a \cdot (a + b) = a$$

البرهان

مسلمة ٣	$a + a \cdot b = a \cdot I + a \cdot b$
مسلمة ٢	$= a \cdot (I + b)$
مصادرة ٢	$= a \cdot I$
مسلمة ٣	$= a$

وكذلك يمكن باستخدام مبدأ الثنائية أن نبرهن $a \cdot (a + b) = a$

المصادرة الرابعة:

بالنسبة لأي عنصر a في نسق الجبر البولي B فإن العنصر المتمم $\grave{a}$ عنصر فريد وأن $a = (\acute{a})$.

البرهان

افترض أن العنصر a له عنصرين متمهان هما $\grave{a}_1$، $\grave{a}$.

إذن

مسلمة ٤	$a + \grave{a} = 1 \quad , \quad a\grave{a} = \phi \quad , \quad a + \grave{a}_1 = 1 \; , \; a.\grave{a}_1 = \phi$
مسلمة ٣	$\grave{a} = \grave{a}.1$
فرضاً	$= \grave{a}\,(1 + \grave{a}_1)$
مسلمة ٢	$= \grave{a}.a + \grave{a}.\grave{a}_1$
مسلمة ٤	$= \phi + \grave{a}\,.\grave{a}_1$
مسلمة ٣	$= \grave{a}.\grave{a}_1$
مسلمة ٣	$= \grave{a}.\grave{a}_1 + \phi$
افتراضا	$= \grave{a}.\grave{a}_1 + a.\grave{a}_1$
مسلمة ١	$= \grave{a}._1\grave{a} + \grave{a}._1 a$
مسلمة ٢	$= \grave{a}._1\,(\grave{a} + a)$
مسلمة ٤	$= \grave{a}_1 \quad 1$
مسلمة ٣	$= \grave{a}_1$
	$\grave{a} = \grave{a}_1$

والآن افترض أن b عنصر في نسق الجبر البولي B

مسلمة ٤ $\therefore b + b = I$ ، $b . b́ = \emptyset$

مسلمة ١ $b + b = I$ ، $b́ . b = \emptyset$

وأفترض أن $á = b$ هي العنصر المتمم للعنصر a بالتعويض عن $á = b$ في المعادلتين السابقتين ينتج أن:

$$(á)' + (á) = I \quad ، (á) . á = \emptyset$$

ولكن المسلمة الرابعة تنص على أن:

$$a + á = I \quad ، a . á = \emptyset$$

إذن متمم a عنصر فريد وينتج أن $a = (á)$.

المصادرة الخامسة: قوانين دي مورجان De Morgan's Laws

بالنسبة لعنصرين a ، b في نسق الجبر البولي B فإن:

$$(a\ b) = á + b́$$

،

$$(a + b) = á . b$$

البرهان

افترض أن $(a . b) . (á . b́)$

مسلمة ٢ $(a . b) . (á + b́) = a . bá + a . b . b́$

مسلمة ١ $= a . á.b + a . b . b́$

مسلمة ٤ $= \emptyset . b + a . \emptyset$

مصادرة ٢ ومسلمة ١ $= \emptyset + \emptyset$

$= \emptyset$

والآن افترض $(\acute{a} + \acute{b}) + a . b$.

$a.b + (\acute{a} + \acute{b})$	$= (\acute{a} + \acute{b}) + a . b$	مسلمة ١
	$= (\acute{a} + \acute{b} + a) . (\acute{a} + \acute{b} + b)$	مسلمة ٢
	$= (\acute{a} + a + \acute{b}) . (\acute{a} + \acute{b} + b)$	مسلمة ١
	$= (a + \acute{a} + \acute{b}) . (\acute{a} + b + \acute{b})$	مسلمة ١
	$= (I + \acute{b}) . (\acute{a} + I)$	مسلمة ٤
	$= I . I$	مصادرة ٢
	$= I$	مصادرة ١

إذن لدينا الآن النتيجتان الآتيتان:

$1 - a . b + (\acute{a} + \acute{b}) = I$

$2 - (a . b) . (\acute{a} + \acute{b}) = \emptyset$

ومن المصادرة ٤ فإنه إذا كان x عنصراً في B فان:

$x + \acute{x} = I$

$x . x = \emptyset$

∴ ،

$(a . b) = (\acute{a} + \acute{b})'$

وباستخدام المصادرة ٤ فان:

$(a . b)' = [(\acute{a} + \acute{b})]' = \acute{a} + \acute{b}$ (1)... ...

فإذا وضعنا á مكان a؛ b́ مكان b في رقم (١) فإنه ينتج أن:

$\acute{a} . \acute{b} = [(\acute{a}) + (\acute{b})]$

ومن المصادرة ٤ ينتج أن:

$$(\acute{a})' = a$$

$$(\acute{b})' = b$$

إذن

$$\acute{a} . \acute{b} = (a + b)$$

المصادرة السادسة: قانون الترابط Associative Law

بالنسبة للعناصر a ، b ، c في نسق الجبر البولي فإن + ، . وظيفتها الترابط حيث:

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

،

$$a . (b . c) = (a . b) . c$$

البرهان

افترض أن الحالة $a + a . (b . c)$

مصادرة ٣ $\therefore a + a . (b . c) = a$

مصادرة ٣ $= a . (a + c)$

مصادرة ٣ $= (a + a . b) . (a + c)$

مسلمة ٢ $a + a . (b . c) = a + (a . b) . c$

(١)... $\therefore a + a . (b . c) = a + (a . b) . c ...$

والآن افترض $\acute{a} + a . (b . c)$

مسلمة ٢ $\therefore \acute{a} + a . (b . c) = (\acute{a} + a) . (a + b . c)$

مسلمة ٤ $= I . (\acute{a} + b . c)$

$= \acute{a} + b \,.\, c$ مسلمة ٣

$= (\acute{a} + b) \,.\, (\acute{a} + c)$ مسلمة ٢

$= [1 \,.\, (\acute{a} + b) \,.\, (\acute{a} + c)$ مسلمة ٣

$= [(\acute{a} + a) \,.\, (\acute{a} + b)] \,.\, (\acute{a} + c)$ مسلمة ٤

$= (\acute{a} + a \,.\, b) \,.\, (\acute{a} + c)$ مسلمة ٢

$= \acute{a} + (a \,.\, b) \,.\, c$ مسلمة ٢

$\therefore \acute{a} + a \,.\, (b \,.\, c) = \acute{a} + (a \,.\, b) \,.\, c$ ... (٢)

بضرب المعادلة (١) في المعادلة (٢)

$\therefore [a + a \,.\, (b \,.\, c)] \,.\, [\grave{a} + a \,.\, (b \,.\, c)]$

$= [a + (a \,.\, b) \,.\, c] \,.\, [\grave{a} + (a \,.\, b) \,.\, c]$

$= [a \,.\, (b \,.\, c) + a] \,.\, [a \,.\, (b \,.\, c) + \grave{a}]$ مسلمة ١

$= a \,.\, (b \,.\, c) + a \,.\, \grave{a}$ مسلمة ٢

$= a \,.\, (b \,.\, c) + \emptyset$ مسلمة ٤

$= a \,.\, (b \,.\, c)$ مسلمة ٣

الفصل الثاني

تطور المنطق في النصف الثاني
من القرن التاسع عشر

١ ـ بيانو وتطوير البحث المنطقي

٢ ـ فريجه والاتجاه اللوجستيقي

١ - بيانو وتطوير البحث المنطقي

تكشف عقلية بيانو [1] الرياضي المنطقي الإيطالي عن عبقرية علمية أصيلة، فقد امتاز بدقة تحليلاته الرياضية والمنطقية. والواقع أن بيانو انتهى إلى دراسة المنطق عن طريق الرياضيات التي فحص أسسها ومبادئها محاولا صياغتها بصورة جديدة تتسق والتطورات العلمية والكشوف الرياضية الحديثة.

والباحثون في مجال المنطق الرياضي لم يتبينوا أهمية بيانو وعظمة فكره، إلا بعد أن كشف برتراند رسّل النقاب عن أهمية مبتكراته في مجال المنطق البحت والمنطق الرياضي وفلسفة الرياضيات، في مؤتمر باريس الرياضي الذي عقد عام ١٩٠٠، وحضره مع رسّل استاذه وزميله هوايتهد.

---

(١) جيوسيب بيانو Guiseppe Peano عالم رياضي ومنطقي إيطالي، ولد في ٢٧ أغسطس ١٨٥٨، واهتم بدراسة أسس الرياضيات وأصولها، وعمل على تطوير لغة المنطق الصوري وأبحاثه المختلفة. شغل بيانو كرسي الأستاذية في حساب اللامتناهي Infintesimal Calculus بجامعة تورين عام ١٨٩٠، وقام بتدريس حساب اللامتناهي في الأكاديمية العسكرية فيما بين الأعوام (١٨٧٧ - ١٩٠١). ومن أهم كتابات بيانو «الصيغ الرياضية» Formulaire de mathematique الذي اشترك في إعداده مجموعة من تلامذته فيما بين الأعوام (١٨٩٤ - ١٩٠١)، ويعرض هذا المؤلف للمفاهيم والمسلمات الأساسية في أصول الرياضيات. وقد اعتمد رسّل على هذا المؤلف - فيما بعد - عند تدوين «أصول الرياضيات» (١٩٠٣)، ثم حين أصدر مع هوايتهد «مبادىء الرياضيات» المعروف في الأوساط المنطقية والرياضية باسم «برنكيبيا» (١٩١٠ - ١٩١٣)، وقد توفي بيانو في ٢٠ إبريل ١٩٣٢.

أراد بيانو ـ تحت تأثير الرياضيات ـ أن يضع نظاماً دقيقاً ومحكماً للمنطق من خلال مصطلحاته الرمزية، فضلا عن محاولته التي قام بها لرد الرياضيات إلى أصول منطقية بحتة Pure logical axioms ، تلك المحاولة التي اعتبرت بمثابة التكأة التي إنطلق منها كتاب «أصول الرياضيات» (١٩٠٣) لرسل، ثم «مبادىء الرياضيات» principia Mathematica لرسّل وهوايتهد.

والحقيقة أن أصالة بيانو المنطقية، أتاحت له أن ينطلق في حركته المنطقية إلى أبعاد التجديد المنطقي الشامل، فنجده يتناول الكثير من أفكار ومبادىء المنطق التقليدي بالبحث والتمحيص، من ناحية، فضلا عن أنه دفع إلى التصور المنطقي ببعض المفاهيم الرياضية والمنطقية الحديثة مما أدى إلى تدعيم الاتجاه اللوجستيقي المعاصر.

ومن ثم فإنه يمكننا أن نعالج فكر بيانو من زوايا ثلاث مختلفة؛ الزاوية الأولى وتتمثل في موقفه من المنطق الصوري بمعناه التقليدي ومعالجته لنسق القضايا الأساسية في المنطق. أما الثانية فتنصب على موقفه العام من المنطق الرياضي وأهمية هذا الموقف بالنسبة للمعاصرين. والموقف الثالث يتضمن عرضاً لموقف بيانو من أصول الرياضيات ومجهوداته في هذا الصدد.

أولا: موقف بيانو من المنطق الصوري التقليدي

نحن نعلم أن المنطق الصوري الأرسطي، ظل الشكل الرسمي للفكر المنطقي منذ أرسطو وحتى أواخر القرن التاسع عشر. ولم تكتب لمحاولات الخروج على المنطق الأرسطي النجاح إلا في عصري بيانو وفريجة. فلم تكن الاعتبارات التي قادت ليبنتز وجورج بول إلى حركة التجديد المنطقي وادخال نمط من أنماط الفكر الرياضي إلى ميدان المنطق دون محاولة الذهاب إلى ما وراء النسق المنطقي التقليدي.

لكنه يمكننا أن نسجل لبيانو أول موقف منطقي جاد من المنطق الصوري الأرسطي، ذلك أن موقفه العام من معالجة الأسس المنطقية التي يستند إليها التصور التقليدي قد أتاح له الفرصة لتطوير المنطق الصوري الحديث أو ما يسمى بالمنطق الرياضي.

ومع هذا فلم ينتبه الباحثون في ميدان المنطق إلى أهمية موقف بيانو من المنطق إلا بعد أن ألقى رسِّل ضوءاً على مجهودات بيانو في هذا المضمار، في مؤلفه الذي أصدره في عام (١٩٠٣) بعد مؤتمر باريس الرياضي، الذي يحمل عنوان «أصول الرياضيات» principles of Mathematics. أفرد رسِّل جزءاً كبيراً في هذا المؤلف لمعالجة موقف بيانو المنطقي، والحقيقة أن بيانو، كما يذهب إلى ذلك رسِّل، يميز تمييزاً حاسماً بين القضية الحملية والتي صورتها «سقراط فان» والقضية العامة ذات الصورة «كل الإغريق فانون».

لكن دقة بيانو المنطقية ومهارته الرياضية، تمثلت في التمييز الحاسم والدقيق بين كل من هاتين الصورتين، فبينما افترض المنطق التقليدي أن القضية الجزئية والقضية الكلية تنطويان على تقرير وجودي لأفراد الموضوع[١]، ذهب بيانو إلى أن الصورتين متمايزتان، وقد أغفل المنطق التقليدي التمييز بينهما.

فالقضية التي نقرر فيها أن «سقراط فان» إنما هي في واقع الأمر تنسب محمولا لموضوع مسمى[٢] وهي ما يمكن أن نسميه بالقضية الحملية Categorical Proposition أو القضية ذات صورة «الموضوع والمحمول» Subject - predicate، على حين أن القضية التي نقول فيها أن «كل الإغريق فانون» إنما هي في حد ذاتها قضية تعبر عن علاقة بين محمولين «إغريق»

---

(١) Mourant, I., Formal logic, p. 212

(٢) Russell, My Philosophical development, p. 66

و « فانون »، أو هي تلك التي تعبر عن علاقة بين قضيتين. فكلمة « إغريق » في هذه القضية هي محمول أيضاً، شأنها في ذلك شأن كلمة « فانون » تماماً. وهذه القضية يمكن لنا تفسيرها على النحو التالي.

« إذا كان س إغريق، فإن س فانون »

أي أنه إذا ما حملنا صفة الإغريق على س فإنه لا بد لنا وأن نحمل عليه أيضاً صفة كونه فان.

وعلى هذا الأساس فإن القضية العامة أو القضية التي نظر إليها أصحاب المنطق التقليدي على أنها قضية حملية، إنما هي في حقيقتها تعبر عن علاقة بين دالتي قضيتين، أو بتعبير أدق هي قضية شرطية متصلة Hypothetical Conjunction في صورة تضمن Implication.

وإدراك « بيانو » لهذا التمييز الدقيق بين كل من صورتي القضية الحملية والقضية العامة، هو الذي أتاح للمناطقة المحدثين، أن يفترضوا أن القضية الجزئية وحدها، هي التي تتضمن تقريراً وجودياً لأفراد الموضوع، على حين أن القضية الكلية أي العامة لا تتضمن أي تقرير وجودي لأفراد الموضوع [1].

ومما لا شك فيه أن رسِّل قد وقف على تمييز بيانو هذا بصورة واضحة واستفاد منه في معالجته لأسس المنطق التقليدي. ومع هذا فلم يكن لرسِّل فضل السبق في هذا التمييز، بل سبقه إليه برادلي في « مبادىء المنطق » لكن برادلي لم يتمكن من الاستفادة من كشفه هذا؛ بينما تمكن رسِّل من تطوير المنطق في جانبه الرياضي من خلال تمييزه هذا.

---

(١) مورانت، المرجع السابق، ص ٩١.

ثانياً: موقف بيانو من المنطق الحديث[1]

إذا كان بيانو قد عالج لنا جانباً هاماً من جوانب المنطق التقليدي فإنه زودنا في الجزء الخاص بالمنطق الحديث ببعض التصورات الهامة التي دفعت بعجلة التطور في المنطق. وقد قدم لنا رسِّل موقف بيانو كما قلنا كاملا في « أصول الرياضيات » ثم تناوله بعد ذلك في « مقدمة لفلسفة الرياضة »، وقد اعتمدت كل الكتابات المنطقية التي جاءت بعد « الأصول » على أفكار رسِّل عن منطق بيانو، ومن ثم فإننا سنعتمد على عرض رسِّل لأفكار بيانو في هذا الصدد.

وضع بيانو خمسة مبادىء أساسية يعتمد عليها النسق الاستنباطي في المنطق وهذه المبادىء الخمسة هي:

(١) مبدأ التبسيط

وفيه يقرر أن الحكم الاقتراني لقضيتين يتضمن الحكم بأولى القضيتين. أي أنه إذا كان لدينا قضيتين ل، م، فإنه إذا كان ل تتضمن ل، وكانت م تتضمن م فإن ل م تتضمن ل.

(٢) مبدأ القياس

إذا كان ل تتضمن م، م تتضمن ن، فإن ل تتضمن ن.

(٣) قاعدة الاستيراد

إذا كانت م تتضمن م، ن تتضمن ن، وكانت ل تتضمن أن م تتضمن ن، فإن ل م تتضمن ن.

(١) راجع: Russell. B., The Principles of Mathematics بنود، ٢١، ٢٢، ٢٣، ٢٤، ٢٥، ٢٦.

(٤) قاعدة التصدير

إذا كانت ل تتضمن ل، وكانت م تتضمن م، ومن ثم فإنه إذا كانت ل م تتضمن ن، فإن ل تتضمن أن م تتضمن ن.

(٥) قاعدة التركيب

وتقرر هذه القاعدة إنه إذا كانت كل قضية تتضمن قضيتين، فإن القضيتين معاً ينتجان عن القضية الأصلية. فإذا كانت ل تتضمن م، وكانت ل تتضمن ن، فإن ل تتضمن م ن.

لكن بيانو لم يقف عند مجرد وضع هذه المبادىء أو القواعد الأساسية للاستنباط، وإنما تعدى هذه الخطوات إلى تناول نظرية الفصول بالبحث فكان أول من رمز إلى الفرد والفصل الذي ينتمي إليه بالرمز ع، وكان تمييزه هذا بمثابة خطوة جادة نحو التمييز بين علاقة الفرد بالفصل وعلاقة الكل بالجزء بين الفصول، وهذا ما جعل رسّل [١] يشيد بتمييزه هذا الذي قضى على الخلط الذي أصاب المنطق التقليدي بين هذين النوعين من العلاقات، فالفرق بينها أساسي تماماً كالفرق بين علاقة الفرد بالنوع وعلاقة النوع بالجنس، كما وقد أتاح له الفرصة أن يؤكد لنا أن « الفصل الذي يتكون من عضو واحد ليس متطابقاً مع هذا العضو » [٢].

ويعتمد النسق الاستنباطي الذي قدمه لنا بيانو على مجموعة أساسية من اللامعرفات والتي تدخل ضمن الجهاز الأساسي للنسق الاستنباطي وهي:

١ ـ الفصل.
٢ ـ علاقة الفرد بالفصل الذي هو عضو فيه.

---

(١) برتراندرسل؛ أصول الرياضيات، بند ٢١

(٢) Russell, B., My Philosophical Development, p. 67

٣ ـ فكرة الحد.

٤ ـ التضمن الصوري.

٥ ـ إثبات قضيتين معاً.

٦ ـ فكرة التعريف.

٧ ـ سلب القضية.

وإلى جانب هذه المجموعة من اللامعرفات وضع لنا مجموعة من القضايا الأصلية[١] التي اعتبرها كبديهيات وهي: ـ

١ ـ إذا كانت س ترمز إلى الفصل، ق، ك ترمزان لعضويتهما في الفصل فإن « ق هي س »، « ك هي س » أي أن كلا من ق، ك ينتميان إلى الفصل س.

٢ ـ إذا كان س، ص فصلان، فإنه إذا قلنا « كل س هي ص » فإن هذا يعني أن « س هي ق تتضمن أن س هي ك ».

٣ ـ إذا كان س، ص ترمزان إلى فصول، فإن حاصل الضرب المنطقي لهما يتكون من الأفراد التي هي أعضاء في الفصلين س، ص أي في الفصل س ص.

٤ ـ إن الفصل الصفري هو « حاصل ضرب أي فصل في سلبه »[٢] أو هو فصل الحدود التي تدخل في كل فصل. فالفصل الصفري إذن هو فصل الحدود التي تدخل في كل فصل، ورغم أن بيانو قد ميز لنا بوضوح فكرة الفصل الصفري؛ إلا أن موقفه يكتنفه بعض الغموض لأنه على حد قول رسّل[٣] يوحد بين الفصل وفصل التصور، وهذا ما أفضى إلى توحيده بين

(١) برتراندرسل؛ أصول الرياضيات، بند ٣٣.

(٢) المرجع السابق، بند ٣٦.

(٣) المرجع السابق، بند ٦٩.

تساوي الفصول المشتملة على نفس الحدود وبين تطابقها، وهذا أمر غير مشروع إذا ما اعتبرنا الفصل، فصل تصور.

وربما كان أهم نقد وجهه رسل [1] إلى الجهاز الاستنباطي المنطقي لبيانو يتمثل في توحيد بيانو بين كل من التضمن الصوري والتضمن المادي؛ بينما وجد رسّل أنه من الضروري التمييز بينهما تماماً، وقد كانت تلك هي مهمة رسّل الأساسية في جهاز الاستنباط الأساسي لمبادىء الرياضيات.

ثالثاً: موقف بيانو من فلسفة الرياضيات

لا شك أن بيانو اهتم بصفة خاصة بأصول الرياضيات التي شغل بتأسيسها فترة طويلة، وهذا ما جعله يحتل كرسي الأستاذية في «حساب اللامتناهي» بجامعة تورين. وقد أشاد رسل بإسهامه في «مقدمة لفلسفة الرياضة» (١٩١٩).

ومن ثم فإننا سنحاول ونحن بصدد عرض موقف بيانو، أن نقدم الأفكار الأساسية التي تعد نقطة بداية في أصول الرياضيات، من خلال ما كتبه رسّل عنه [2].

النقطة الأساسية التي يبدأ بها البحث في فلسفة الرياضيات وأصولها تتمثل في محاولة الوصول إلى أقل عدد ممكن من الأفكار والتعاريف الأساسية التي تعتبر بمثابة أصول الاشتقاق، وبحيث تسمح لنا باشتقاق أو استنباط deduce الرياضيات بأسرها منها، وبمعنى آخر يدور البحث حول الأسس المنطقية Logical basis للرياضيات. وقد اضطلع بيانو بهذه المهمة في مبدأ الأمر،

---

(١) المرجع السابق، بند ٣٢. وراجع أيضاً نظرية حساب القضايا في هذا المؤلف.

(٢) Russell, B., Introduction to Mathematical philosophy, ch. 1, ch. III.

ثم أمكن رد الرياضيات بأسرها إلى المنطق في « مبادیء الرياضيات » لرسّل وهوايتهد.

وضع بيانو مجموعتين من أصول الاشتقاق؛ تتضمن المجموعة الأولى منها ثلاثة أفكار ابتدائية Primitive Ideas هي:

١ ـ الصفر «0»
٢ ـ العدد Number
٣ ـ التالي Successor

أما المجموعة الثانية فتشتمل على خمس قضايا ابتدائية Primitive Propositions هي:

١ ـ أن الصفر عدد.
٢ ـ أن تالي أي عدد هو عدد.
٣ ـ ليس لعددين نفس التالي.
٤ ـ أن الصفر ليس تالياً لأي عدد.
٥ ـ أن أي خاصة property من خواص الصفر هي بالضرورة خاصة لجميع الاعداد.

إنه إذا نظرنا في مجموعتي أصول الاشتقاق التي وضعها بيانو وجدنا أنه يميز تمييزاً واضحاً بين كل من متسلسلة الأعداد الصحيحة ومتسلسلة الأعداد الطبيعية [١].

(١) تبدأ متسلسلة الأعداد الصحيحة بالأعداد، ١، ٢، ٣، ٤، .... الخ، أما متسلسلة الأعداد الطبيعية، وهي ما يبدأ به الرياضي فهي ٠، ١، ٢، ٣، ٣... ن، ن + ١، ن + ٢،... الخ. ويؤكد رسّل أن إضافة الصفر، إنما هي إضافة حديثة، لأنه لو تسنى للقدماء معرفة أن الصفر عدد لأمكن تطوير الرياضيات إلى أبعد مما هي عليه الآن. راجع: برتراندرسِّل؛ « مقدمة لفلسفة الرياضة، ص ٣.

لكن كيف يمكن اشتقاق نظرية الأعداد الطبيعية من الأصول التي وضعها بيانو واعتبرها بمثابة أصول الاشتقاق؟

البرهان على هذا يسير وفق الخطوات التالية [1]

بواسطة القضية الابتدائية رقم (٢) والتي تنص على أن «تالي أي عدد هو عدد» فان العدد ١ هو تالي الصفر، العدد ٢ هو تالي الواحد، والعدد ٣ هو تالي العدد ٢، والعدد (ن + ١) هو تالي العدد ن... الخ. (١)

وبواسطة القضية رقم (٢) والتي تنص على انه «ليس لعددين نفس التالي»، فانه من الواضح اننا لم نصل في خطوتنا السابقة الى تالي واحد لعددين (٢)

وبواسطة القضية رقم (٤) والتي تنص على ان «الصفر ليس تالي أي عدد» يتضح لنا أننا في طريق البرهان رقم (١) لم نصل الى الصفر كتالٍ لاي عدد. (٣)

∴ من (١)، (٢)، (٣) يمكن أن نصل في البرهان إلى ما لا نهاية وتصبح المتسلسلة على النحو التالي:

٠، ١، ٢، ٣، ...ن، ن + ١، ن + ٢، ... ∞ [1].

إلا أن برهان بيانو، على هذا النحو، لقي كثيراً من النقد على يدي رسِّل الذي يعتبره موقفاً أوليّاً في الاشتقاق وليس نهائياً في الرد، لأن «الصفر»، «العدد»، «التالي» تقبل عدداً لا نهائياً من التفسيرات المختلفة.

ورغم أن بيانو قد وضع لنا الأفكار والقضايا الإبتدائية التي تساعدنا على اشتقاق الرياضيات بأسرها من المنطق، إلا أنه لم يتمكن من رد الرياضيات إلى المنطق بصفة نهائية، وقد كانت تلك مهمة رسِّل وهوايتهد في مبادىء الرياضيات، بحيث أضحت الرياضيات بأسرها منطقاً، وبات من المعتذر على الذهن التحليلي أن يتبيّن أين ينتهي المنطق وأين تبدأ الرياضيات.

---

(١) العلامة «∞» ترمز إلى اللانهاية، أي أننا نسير في متسلسلتنا إلى ما لا نهاية له من الأعداد.

٢ ـ فريجه والإتجاه اللوجستيقي

أما إذا إنتقلنا إلى فريجه [١] وبحثنا موقفه من المنطق بصفة عامة، والمنطق الرياضي بوجه خاص، لوجدنا أنفسنا أمام عقلية ضخمة تعبر بحق عن أصالة الروح الجرمانية منهجاً وموضوعاً، فهو سليل ليبنتز وكانط وهيجل في الدقة وعظمة البناء. وقف على أعمال السابقين عليه واستوعب نظرياتهم وآراءهم، فنقد بعضها وأضاف إلى البعض الآخر إضافات جديدة، وهذا ما حدا بالباحثين على اختلاف اتجاهاتهم أن يعتبروه بحق مؤسس المنطق الحديث [٢]، بل إننا نجد كريستيان ثيل Christian Thiel وهو من أئمة الباحثين في فكر فريجه، يذهب إلى أن فريجه لم يترك في مجال المنطق الرياضي شيئاً ليقوله أحد من بعده.

والحقيقة أن فريجه يعتبر حلقة هامة من حلقات التطور في تاريخ المنطق والرياضيات على حد سواء، رغم أن الباحثين من المناطقة والرياضيين لم يتنبهو

---

(١) جوتلوب فريجه Gottlob Frege (١٨٤٨ ـ ١٩٢٥) من أكبر الرياضيين الألمان في النصف الثاني من القرن التاسع عشر وأوائل القرن العشرين. امتاز بعقلية رياضية منطقية، واضطلع بتطوير جزء كبير من أبحاث المنطق الرياضي، خاصة فيما عرف بالمذهب اللوجستيقي الذي تبلور في صورته النهائية في «مبادىء الرياضيات» Principia Mathematica (١٩١٠ - ١٩١٣) الذي اشترك فيه رسّل وهوايتهد. ومن أهم أبحاث فريجه «أسس الحساب» Die Grundlagen der Arithmetik (١٨٤٨)، «الدالة والتصور» Function (١٨٩١) و«القوانين الأساسية لعلم الحساب» (١٨٩٣) Grundgesetze der und Begriff Arithmetik، و«الفكر: بحث منطق» (١٩١٨ - ١٩١٩) Der Gedanke: Eine Logische untersuchung. هذا إلى جانب العديد من المؤلفات الأخرى والتي يتوجها جميعاً كتابه الأشهب في «التصورات» (١٨٧٩) Begriffsschrift.

(٢) Thiel, Christian, Sense and Reference in Frege's Logic, P. 8

ونحن نعتبر مؤلف «ثيل» هذا إلى جانب ما كتبه رسّل في الملحق الخاص بأصول الرياضيات عن فريجه، من المراجع الأساسية للوقوف على موقف فريجه من أبحاث المنطق والرياضيات.

إلى عبقريته وأصالته إلا بعد أن كشف رسِّل النقاب عن جوانب فكره في الملحق الخاص الذي ذيل به كتابه الأشم « أصول الرياضيات » (١٩٠٣) حيث تناول فكر فريجه من حيث المنهج والموضوع ونقاط الأصالة والنسق الاستنباطي، وتصحيحه لبعض المواضع في المنطق الصوري الأرسطي.

وينبغي أن نشير إلى أن معظم الباحثين، وهم بصدد حركة التأريخ للمنطق الحديث لم يعنوا بفريجه وأبحاثه، الأمر الذي أفضى بالرياضيين إلى إهماله. لكن بعد أن قدمه رسِّل للمفكرين، وبعد أن نقل « ماكس بلاك » Max Black أكثر أعماله من الألمانية إلى الإنجليزية، أضحت أعمال فريجه سهلة ويسيرة إلى حد كبير. ومع هذا فقد تطلب عرض منهج فريجه ودراساته، تحليلا وتركيباً ومقارنة، سنوات طويلة كان حصيلتها بحث أصيل للمنطقي الرياضي « كرستيان ثيل ».

ولقد بلغت أبحاث فريجه المنطقية أوجها في وقت وقف فيه المناطقة في مفترق الطرق بين التقليدية والعلمية، فلا الرياضيون قادرون على تخطي النسق المنطقي التقليدي، ولا التقليديون قادرون على تجاوز الأصل الأرسطي إلى ما هو جديد، اللهم إلا في مواضع طفيفة. وما نؤكده هنا لأول وهلة، أن فشل الإتجاهين معاً في تخطي المنحنى الحرج إلى نقطة الانقلاب Zero point في المنطق، إنما يرجع أساساً إلى سيطرة المنطق المثالي، بزعامة برادلي، آنذاك على دوائر الفكر المنطقي.

حمل فريجه الدعوة إلى الاتجاه اللوجستيقي بكل وضوح في كتاب « التصورات » (١٨٧٩) حيث تمكن من خلال اتجاهه الجديد في المنطق والرياضيات معاً، من أن يزود أجيال المناطقة والرياضيين بأربعة تصورات أساسية:

١ - تصوره لإطار نظرية حساب القضايا.

٢ ـ تصوره لفكرة دالة القضية.

٣ ـ تصوره لفكرة السور quantifier واستخدامها استخداماً حديثاً بحيث أصبحت بالإضافة إلى فكرة دالة القضية تكون التصور الأساسي لنظرية حساب المحمول.

٤ ـ التحليل المنطقي للبرهان عن طريق الاستقراء الرياضي باستخدام فكرة الفصل Class.

ولكننا في عرضنا لموقف فريجه سنركز على موضوعين أساسيين: الأول، موقف فريجه من أسس المنطق الصوري وأبحاثه، والثاني، موقفه من أسس النسق الاستنباطي ونظرية حساب القضايا.

أولا: موقف فريجه من أسس المنطق الصوري وأبحاثه

نعلم من دراستنا لتاريخ المنطق أن أصحاب المنطق التقليدي والمشايعين للنزعة الأرسطية، حصروا متن أبحاثهم المنطقيـة في القضية ذات صورة الموضوع المحمول، ومن ثم فقد رأوا أن كل قضية تشتمل بالضرورة على حدين مرتبطين بفعل الكينونة (To Be). فصورة القضية «سقراط إنسان»[١] تنحل بالضرورة إلى ثلاثة مكونات:

١ ـ الموضوع «سقراط»

٢ ـ المحمول «إنسان»

٣ ـ الرابطة[٢] Capula، بين الموضوع والمحمول، «يكون».

وقد حاول التقليديون رد الصور الأخرى للقضايا إلى صورة القضية الحملية، ولم يتبينوا أن هناك ثمة فروق جوهرية بين كل من القضية الحملية

(١) Stebbing, S., A Modern Introduction to logic, p. 34.

(٢) صورة هذه القضية في اللغة الانجليزية «Socrates is a man». الرابطة بين الموضوع =

والقضية العامة مثلا . ولكن فريجه استطاع بدقة تحليلاته المنطقية أن يكشف لأول مرة في تاريخ المنطـق اختلاف صـورة القضيـة الحمليـة عـن القضيـة العامة [1] . ذلك لأننا في القضية الحملية نقرر assert ، أما في القضية العامة مثل قولنا « كل إنسان فان » فإننا لا نقرر الوجود لأفراد الموضوع، بل نكون بصدد الحكم judgement على كل أفراد الموضوع بالفناء ؛ ومن ثم فإن القضية (كل إنسان فان) تفسر على النحو التالي (إذا كان س إنسان فإن هذا يتضمن بالضرورة أن س فان) . من هنا توصل فريجه إلى نقطتين في غاية الأهمية بالنسبة لأبحاث المنطق، الأولى ؛ أن صورة القضية العامة في جوهرها إنما هي شرطية متصلـة . والثـانيـة ، أن هنـاك تمييـزاً حـاسماً بين التقـريـر assertion والحكم . وهذا ما جعله يميز بين محتوى content الحكم وتقريره . ولذا وجدنا رسِّل يؤكد لنا أن فريجه يميز بين ثلاثة عناصر أساسية في إطار نظرية الحكم هي [2] :

١ ـ معرفة الصدق Truth

٢ ـ الفكر Thought |(Gedanke)

٣ ـ قيمة الصدق [3] Truth - value

= والمحمول هنا يعبر عنها بفعل الكينونة «is» ، وهي لا تظهر في اللغة العربية إلا بصورة ضمنية. لمزيد من التفصيل في معرفة المعنى الذي تستخدم فيه الرابطة يرجع إلى كتاب « الفلسفة ومباحثها » للدكتور محمد علي أبو ريان، « وأصول الرياضيات » لبرتراند رسل. الجزء الأول والسابع.

(١) Stebbing. op. cit, 40
وتؤيد « استبنج » رأي « رسل » بأن فريجه أدرك هذا التمييز مستقلا عن بيانو وفي نفس الوقت الذي عرف فيه بيانو الاختلاف بين الصورتين.

(٢) Russell. B., The principles of Mathematics; Appendix A, p. 477.

(٣) Anscombe, G., An Introduction to Wittgenstein's Tractatus, p. 14
وتشير « أنسكومب » إلى أن أجيال المناطقة حتى يومنا هذا يدينون بالفضل لفريجة فيما =

والحقيقة أن تمييز فريجه الحاسم بين مسألة التقرير والحكم يفضي بنا إلى بحث موقفه العام من بعض المواضع في المنطق بصفة عامة. وقد اهتم فريجه بهذه المسألة في المقالة التي كتبها بعنوان (الفكر: بحث منطق) حيث أكد لنا ما سبق أن أورده من أفكار في كتاب (التصورات) الذي تبنى فيه الدعوة لرفض كل اتجاه سيكولوجي في المنطق أو علم الحساب.

يرى فريجه أنه إذا ما نظرنا للمنطق وقوانينه بالمنظور التقليدي، فإن هذا سيفضي إلى خطورة شديدة وصعوبات عديدة تكتنف كل أبحاثه، لأن هذا سيعني بالضرورة أن يكون المنطق فن التفكير الصحيح. وبالتالي تصبح القوانين المنطقية بمثابة المرشد للفكر في الحصول على الصدق[١]. ومن ثم وجدنا فريجه يذهب إلى التمييز بين الموضوعات الخارجية أو الأشياء objects والتصورات Concepts فنحن نستطيع أن نتحدث عن الأشياء ونطلق عليها أسماء names، أي نسميها. أما التصورات[٢] فهي تتطلب موضوعاً لتملأه، وبالتالي فإن التصورات أقل كمالا من الأشياء والتصور هو ما يكون محمولا وفق مذهب فريجه المنطقي لا أن يكون موضوعاً. ومن المعروف أن موقف فريجه هذا قد أثر فيما بعد، في أجيال المناطقة والفلاسفة على السواء خاصة رسِّل وفتجنشتين وكارناب Carnap.

لكن كيف نميز الأفكار thoughts عن الأشياء الموجودة في العالم الخارجي في إطار مذهب فريجه المنطقي؟

يقيم فريجه[٣] أربعة تمييزات أساسية بين الأفكار والأشياء هي:

= يتعلق بمفهومه عن (قيمة الصدق)، وهي تتفق في هذا الرأي مع ما ذهب إليه رسِّل في أكثر من موضع من كتاباته.

(١) Thiel, C, op. Cit, p. 22

(٢) في كثير من المواضع يستخدم فريجه كلمة (الدالة) function بدلا من التصور Concept.

(٣) Frege, G; «Thought: A Logical Inquiry», pp. 26-28, trans. by A. M. and Marcelle Quinton, ed. in, philosophical Logic by P.F. Strawson.

أولا: إنه لا يمكن لنا رؤية الأفكار أو لمسها أو تذوقها أو شمها، على حين أن الأشياء تتمتع بهذه الخواص جميعاً.

ثانياً: إن الفكرة التي لدى فرد ما تنتمي بالضرورة إلى محتوى الشعور الخاص بهذا الفرد وحده ولا يمكن أن تكون بنفس الدرجة لدى أي فرد آخر.

ثالثاً: إن الأفكار Ideas تحتاج إلى حامل bearer، أما الأشياء الموجودة في العالم الخارجي فهي مستقلة تمام الإستقلال عن هذا الحامل لأنها قائمة بذاتها، ومن ثم فإنه إذا ما كانت لدي فكرة ما عن شيء معين فإن هذه الفكرة في حد ذاتها تختلف عن فكرة أي شخص آخر عن نفس الشيء.

رابعاً: إن كل فكرة من الأفكار لها حامل واحد فقط، فليس لشخصين نفس الفكرة.

وقد استخدم فريجه فكرته الأساسية عن تمييز الأشياء من التصورات في نظرية المعنى والدلالة، لكن رسِّل [1] الذي اهتم بعرض موقف فريجه في نظرية الدلالة ونقده، أثار بعض الصعوبات الخاصة بموقف فريجة فيما يتعلق بنظرية العدد number وإقامة علم الحساب. ويمكن القول بأن ما وجِّه إلى فريجه من نقد أثبته رسِّل أو فتجنشتين أو غيرهما من المناطقة ينحصر في نقطتين:

النقطة الأولى: أن فريجه كان يتحدث عن التصورات، ومن ثم فقد كان مضطراً لأن يفترض أن كل تصور له موضوع خاص به ومرتبط به ويمكن اعتباره كموضوع فقط حين نتحدث عن التصور.

(١) Russell, B., «On Denoting», P. 45 ff. ed. in, Logic and Knowledge by R.C. March.

وأيضاً:

Wittgenstein, L., Tractatus Logico-Philosophicus, 4.431, 5.02

النقطة الثانية: إن تصور الموضوع الخارجي وفق مذهب فريجه لا يتفق تماماً مع نظريته التي أقامها في المعنى والإشارة **Sense and Reference** التي تعد امتداداً لنظرية الموضوع ـ المحمول.

إلا أن ما وجه إلى فريجه من نقد لا يرقى إلى مستوى الحقيقة بالنسبة لجوهر مذهبه في المعنى والإشارة، لأن تمييز فريجه قصد به أساساً أن يؤكد رأيه في مسألة الذاتية **Identity**.

ثانياً: موقف فريجه من أسس النسق الاستنباطي ونظرية حساب القضايا

حينما فحص فريجه «أسس وقوانين الحساب» وجد أن الرياضيات بأسرها تعمل وفق النسق الاستنباطي، وأن الحساب إنما هو نسق متطور للمنطق؛ لأن كل قضية حسابية هي بالضرورة قانون منطقي. لهذا اتجه فريجه إلى محاولة إقامة المنطق كنسق استنباطي في المحل الأول وفق أفكار ومفاهيم أساسية تجعل من النسق المنطقي نسقاً محكماً يفي بأغراض البحث العلمي.

وقد أشرنا ونحن بصدد الحديث عن أرسطو، أن كثيراً من الباحثين والمؤرخين المعاصرين للمنطق الأرسطي ذهبوا إلى أن أرسطو كان مدركاً تماماً لفكرة النسق الاستنباطي في المنطق. وقد ظلت فكرة إقامة المنطق كنسق استنباطي تراود فكر المناطقة عبر عصور طويلة ابتداء من عصر ليبنتز وحتى عصر فريجه، الذي إستطاع بدقته المنطقية أن يتبين النقاط الجوهرية بالنسبة للنسق الاستنباطي في المنطق.

عرض لنا فريجه أسس النسق الإستنباطي في المنطق بصورة شبه متكاملة في «التصورات»[1] حيث نجد من ثنايا الأفكار التي قدمها لنا، أسس نظريتي

---

(١) محمود زيدان، المنطق الرمزي: نشأته وتطوره، ص ١٤٩ـص ١٥٦. والرموز التي يستخدمها المناطقة هي رموز بيانو، ذلك لأن رموز فريجة غاية في الصعوبة.

حساب القضايا وحساب المحمول.

(١) يرمز للقضايا بالرموز p، q، r

(٢) يرمز إلى تقرير القضية بالرمز ⊢

(٣) يرمز إلى المحمولات بالرموز F، G، H

(٤) يرمز إلى الموضوعات بالرمز X، Y، Z

(٥) وضع رمز للسور الكلي للقضية (X)

(٦) اهتم بدراسة القضية المركبة والثوابت المنطقية مثل ثوابت السلب والوصل والفصل والتضمن والمساواة، ورمز لكل من هذه الثوابت.

(٧) اهتم بالتمييز بين عضوية الفرد في فصل واحتواء فصل في آخر.

وقد وجد فريجه أنه يمكن إقامة النسق الاستنباطي ككل عن طريق استخدام فكرتين أوليتين هما التضمن والسلب بالإضافة إلى ثلاثة تعريفات هي: الفصل والوصل والمساواة.

الفصل الثالث

مفاهيم المنطق الرياضي

١ ـ دالة القضية

٢ ـ المتغيرات

٣ ـ الثوابت

أ ـ ثابت الوصل

ب ـ ثابت الفصل

جـ ـ ثابت التضمن

د ـ ثابت التكافؤ

هـ ـ ثابت السلب

٤ ـ قيمة الصدق

٥ ـ قائمة الصدق

٦ ـ دوال الصدق

ا ـ دالة الوصل

ب ـ دالة الفصل

جـ ـ دالة التضمن

د ـ دالة التكافؤ

هـ ـ دالة السلب

لكل علم من العلوم موضوع محدد، لا تتضح أهميته ولا تظهر إلا من خلال مطلبين أساسيين ينبغي توافرهما حتى يتحدد الموضوع وهما:

(١) مفاهيم العلم Notions of Science

(٢) نسق العلم System of Science.

أما المفاهيم فمن الواضح تماماً أنها متباينة في العلوم، لأن المفاهيم التي يستخدمها علم الفيزياء تختلف عن مثيلتها في الكيمياء، رغم أنهما معا من العلوم الطبيعية Natural Sciences. كذلك فإن المفاهيم التي نجدها في علم الاجتماع تختلف عن تلك التي يبدأ بها علم النفس، وهما معاً من العلوم الاجتماعية Social Sciences. ومع أن المنطق والرياضيات ينتميان للعلوم الصورية Formal Sciences، إلا أن المنطق يستخدم المفاهيم المتميزة تماماً عن مفاهيم الرياضيات. لكن النقلة التاريخية التي حدثت في المنطق والرياضيات منذ النصف الثاني من القرن التاسع عشر، جعلت المنطق يقترب من الرياضيات إلى حد كبير متجهاً إلى البرهنة الدقيقة على أفكاره ونظرياته، كما جعلت الرياضيات أيضاً تدنو وتقترب من المنطق باحثة عن أصولها المنطقية، فكان أن انصهرت الرياضيات والمنطق معا في بوتقة واحدة، وجاء الوليد الجديد... المنطق الرياضي... الذي أخذ من المنطق بقدر معين، ومن الرياضيات بقدر مماثل، واتجه هذا العلم الجديد بالمنطق والرياضيات نحو

وحدة علمية متكاملة، إن في المفاهيم أو في النسق.

والمنطق الرياضي، وهو من العلوم البرهانية الدقيقة، حدد منذ البداية المفاهيم الأساسية التي ينبغي أن تتم من خلالها عملياته، على اعتبار أن هذا التحديد أولى الخطوات نحو وحدة العلم وتماسكه.

ومن أهم المفاهيم التي يستند إليها المنطق الرياضي ما يلي: دالة القضية **Propositional Function**، المتغيرات **Variables**، الثوابت **Constants**، دالة الصدق **Truth Function**، قيمة الصدق **Truth-Value**، وقائمة الصدق **Truth - Table**.

١ ـ دالة القضية Propositional Function

حول مفهوم دالة القضية تلتقي الرياضيات بالمنطق، فالمصطلح مزدوج: الشق الأول منه وهو «دالة» **Function** أحد المفاهيم الرئيسية في الرياضيات. أما الشق الثاني وهو مفهوم «القضية» **Proposition** فمن المفاهيم المنطقية التي طالما تحدث عنها المناطقة.

ويمكن توضيح المفهوم «دالة» بمثال من الرياضيات: ص = (٤ أ + ٢). في هذا المثال نجد أنه إذا عرفت قيمة أ تحددت بالتبعية قيمة ص، بمعنى أن ص دالة أ. وفي الجبر المألوف نشير إلى هذا الفهم بالتعبير [ص (د) أ]. الدالة هنا ـ كما تفهمها الرياضيات ـ ما يتبقى لدينا بعد رفع القيم المجهولة (ص، أ) من الصيغة ككل، بحيث تصبح كما يلي:

[٢ + (   ) ٤] = (   )

هذا التعبير يمكن الحصول على قيمة محددة له إذا أعطينا لكل من (ص، أ) قيماً، أو إذا أعطينا لواحدة منها بعض القيم تحددت قيمة المجهول

الآخر. افترض أن قيم (أ) هي ٢، ٣، ٥، والمطلوب معرفة قيم ص. نقوم على الفور بالتعويض عن قيم (أ) بالقيم التي لدينا فتنتج قيم (ص) على النحو التالي:

في حالة أ = ٢

∴ ص = ٤ × ٢ + ٢ = ١٠ ← (١)

في حالة أ = ٣

∴ ص = ٤ × ٣ + ٢ = ١٤ ← (٢)

في حالة أ = ٥

∴ ص = ٤ × ٥ + ٢ = ٢٢ ← (٣)

ويمكن التأكد بطريقة عكسية من أن قيم ص صحيحة عن طريق وضع قيم ص واستخراج قيم أ المشار إليها، مثال: افترض في حالة ص = ٢٢، أنه مطلوب استخراج قيمة أ.

ص = ٢٢

∴ ٢٢ = ٤أ + ٢

٢٢ − ٢ = ٤أ

٢٠ = ٤أ

∴ أ = ٥

وهي نفس قيمة أ التي تم التعويض بها داخل الصيغة.

أما مصطلح «القضية» فهو من المصطلحات المنطقية التي ذاع استخدامها في المنطق الصوري بصفة خاصة. وقد اعتقد المناطقة تحت تأثير أرسطو أن أبسط أنواع القضايا الأخرى هي القضية الحملية ذات صورة «الموضوع ـ المحمول» **Subject-Pradicate**، وأنه لا يمكن تحليل هذه

الصورة إلى ما هو أبسط منها، ويمكن رد القضايا الأخرى إليها. لكن المناطقة من أصحاب النزعة الرياضية، في نهاية القرن التاسع عشر، اكتشفوا أن القضية الكلية أو العامة ـ باعتبارها أبسط أنواع القضايا ـ ليست حملية على الإطلاق، وإنما هي قضية شرطية. مثال ذلك القضية:

كُل إنسان فان

هذه القضية تفسر كما يلي:

« إذا كان (س إنسان) فإن (س فان) »

نلاحظ أن هذه القضية الجديدة تحتوي على مكونات هامة وهي:

١ ـ السور المعبر عن الشرط (إذا كان... فإن...)

٢ ـ الصيغة (س إنسان)

٣ ـ الصيغة (س فإن)

فإذا نظرنا في الصيغة « س إنسان » والصيغة « س فان » وجدنا أنهما ليستا بقضايا لأن هناك قيمة مجهولة هي (س) في الحالتين. فإذا أعطينا (س) عدداً معيناً من القيم تحددت الصيغة التي أمامنا. وما يفهمه المنطق الرياضي من الصيغة « س إنسان » أنها دالة قضية، تصبح قضية فقط إذا تعينت قيمة (س). فإذا أعطينا (س) القيمة « زيد » أصبحت ككل « إذا كان زيد إنساناً فإن زيداً فان » معبرة عن قضية شرطية لها مقدم وتالي. « زيد إنسان » مقدم القضية الشرطية، « زيد فان » تالي القضية الشرطية. كذلك فإن المقدم هنا يعبر عن قضية، وكذلك التالي.

٢ ـ المتغيرات Variables

في الصيغة الشرطية السابقة « إذا كان زيد إنساناً فإن زيداً فان »، يمكن أن نكثر المسألة إيضاحاً ـ إذا أخذنا المقدم « زيد إنسان » ورمزنا له بالرمز

p ، وأخذنا التالي « زيد فان » ورمزنا له بالرمز q ، أمكننا الحصول على الصيغة الآتية:

« إذا كان p فإن q »

نلاحظ أن الرمز p ، والرمز q يقوم كلٌّ منهما مقام قضية كاملة، وما يقوم مقام القضية نسميه المتغير Variable.

واستخدام المتغيرات من أدق خصائص الرياضيات، وقد استخدمها أرسطو قديماً في المنطق. لكن قدر لاستخدام المتغيرات أن ينتشر في الرياضيات بصورة شاملة وعامة، بحيث يصبح من المتعذر ـ إن لم يكن من المستحيل ـ أن نتحدث عن رياضيات بدون المتغيرات.

وقد تنبه المنطق الرياضي إلى هذه الميزة الكبرى التي استفادها بصورة أساسية من الرياضيات، على اعتبار أن المتغيرات تحدد بدقة الصورة المنطقية لما نريد الحديث عنه، حيث تقوم مقام اللغة التي كثيراً ما تتعرض للغموض والإبهام وسوء الفهم، فضلا عن كونها مصطلحات عالمية يمكن لقارئها أن يفهمها.

٣ ـ الثوابت Constants

من المألوف أن نجد الرياضي يستخدم في عملياته الرياضية مجموعة من العلامات مثل + ، − ، × ، ÷ ، الخ، لينتقل من صيغة إلى أخرى، أو ليحدد علاقة بين متغيرين أو أكثر. وهذه العلامات هي ما نطلق عليه الثوابت الرياضية Mathematical Constants ، حيث نجد لكل منها معنى معيناً يطبق على العملية أو الصيغة الرياضية التي أمامنا.

كذلك تبيّن للمنطق الرياضي أنه من الممكن استعارة فكرة الثوابت من

الرياضيات، ولكن بصورة تلائم عملياته، وتجعل مفاهيمه واضحة، من خلال وضع مجموعة من الثوابت التي إذا ما طبقت على الصيغ أمكن الانتقال من صيغة لأخرى انتقالا صحيحاً ويتبين لنا هذا إذا نظرنا في الصيغة السابقة وهي:

(إذا كان p فإن q)

في هذه الصيغة نلاحظ وجود السور Quantifier « إذا... فإن... »، وهذا السور يشير إلى العلاقة بين p ، q ، ويمكن الاستغناء عنه ووضع أحد الثوابت مكانه لتأتي الصيغة ككل مشيرة إلى المتغيرات والعلاقة بينها. والثابت الذي يوضع بدلا من « إذا... فإن... » هو ثابت التضمن ⊃ حيث:

$$p \supset q$$

فكأن القضية التي لدينا انتهت إلى صورة رمزية: Symbolic Form قوامها متغيران وثابت. والصيغة التي تحتوي على متغيرات وثوابت نسميها « دالة القضية »، ومن ثم فإن دوال القضايا تختلف باختلاف الثوابت.

والثوابت المنطقية المستخدمة في المنطق الرياضي متنوعة: لدينا ثابت الوصل Conjunction الذي نشير إليه بالعلامة (.) ويعني « و » أو « and »، وثابت الفصل disjunction الذي نشير إليه بالعلامة (V) ويعني « أو » أو « إما... أو... » أو « or »،. وثابت السلب Negation الذي نشير إليه بالعلامة (~) وتعني « لا » أو « Not ». وثابت التضمن Implication الذي نشير إليه بالعلامة (⊃) وتعني « يتضمن » أو imply. وأخيراً ثابت التكافؤ equivalence الذي نشير إليه بالعلامة (≡)، وتعني « تكافىء »، أو equivalent، ويمكن أن نتناول هذه الثوابت حين تربط بين المتغيرات.

أ ـ ثابت الوصل (.)

إذا كان لدينا القضية « الدنيا نهار » ورمز لها بالرمز p والقضية « الشمس طالعة » ورمز لها بالرمز q، وأردنا التعبير عن القضية التي تربط بينهما وتؤلف منهما قضية واحدة هي « الدنيا نهار والشمس طالعة »، فإننا نلاحظ أن الوصل بين القضيتين يشار إليه بالحروف « و » الذي نرمز له بالثابت (.)، وبالتالي تصبح الصيغة الرمزية باستخدام p، q والثابت (.) هي:

p . q

وتقرأ هذه الصيغة «p and q».

ومن ارتباط المتغيرين p، q بثابت الوصل (.) تنشأ لدينا دالة الوصل.

ب ـ ثابت الفصل (v)

إذا كانت لدينا القضية « إما أن يزحف الجنود لملاقاة الأعداء أو يستمرون في التدريب »، فإننا نلاحظ أن هذه القضية تتألف من المكونات الآتية:

- « إما ... أو ... » وهو ثابت الفصل (v).
- « يزحف الجنود في التدريب »، وهو القضية الأولى والتي نشير إليها بالمتغير p.
- « يستمر الجنود في التدريب »، وهو القضية الثانية التي نشير إليها بالمتغير q.

ومن ثم يمكن وضع القضية ككل في الصيغة الرمزية:

«p v q»

وتعني هذه الصيغة:

. Either p or q .

أو

. p or q .

والصيغة الرمزية «p v q» هي ما نشير إليه بدالة الفصل.

جـ ـ ثابت التضمن (⊃)

سبق أن أشرنا إلى ثابت التضمن، بالصيغة «p ⊃ q» وهـذه الصيغة تسمى دالة التضمن.

د ـ ثابت التكافؤ (≡)

والصيغة التي نعبر بها عن علاقة قضية بأخرى من خلال ثابت التكافؤ هي

«p ≡ q»

وتقرأ «p equivalent q» والصيغة ككل تشير إلى دالة التكافؤ.

هـ ـ ثابت السلب (~)

أما ثابت السلب فله ميزة خاصة، إذ أنه لا يؤسس علاقة بين قضيتين، وإنما يدخل على قضية واحدة فينفيها. فإذا كانت لدينا القضية «كل إنسان فان» وأدخلنا عليها ثابت السلب، تصبح «لا إنسان فان»، فإذا كانت القضية الأولى p، فإن القضية الثانية تصبح p ~. وما نعنيه بالصيغة p ~ هو أنها نفي أو نقيض p.

إذن الصيغ p . q، p v q، p ⊃ q، p ≡ q، p ~ هي دوال قضايا، نقول عنها بالترتيب: دالة الوصل، دالة الفصل، دالة التضمن، دالة التكافؤ ودالة السلب. وتتميز كل دالة عن الأخرى من خلال قيمة الصدق

من حيث أن قيمة الصدق تعني أن نحكم على القضية المؤلفة من قضايا بسيطة بالصدق أو الكذب.

٤ - قيمة الصدق Truth Value

وقيمة الصدق بالنسبة لأي صيغة من الصيغ تتحدد وفق مجموعة من العوامل هي:

أ - معنى الثابت المنطقي: فالصيغة التي تحتوي على ثابت التضمن مثلا تختلف قيمة صدقها عن تلك التي تحتوي على ثابت التكافؤ أو الوصل أو الفصل.

ب - صدق القضيتين معاً.

جـ- كذب القضيتين معا.

د - صدق واحدة وكذب الأخرى.

٥ - قائمة الصدق Truth-Table

وقيم الصدق التي نتوصل إليها نرصدها في جدول أو قائمة Table بحيث نضع تحت كل متغير رمز الصدق Truth الذي نشير إليه بالرمز T، ورمز الكذب False الذي نشير إليه بالرمز F، ثم نطبق معنى الثابت المنطقي على العلاقة بين المتغيرين من حيث الصدق والكذب، فنحصل على قيم معينة تحت الثابت الموجود في القائمة وهذه القيم تحدد لنا صدق أو كذب الدالة ككل، أو الحالات التي تصدق فيها الدالة. فكأن قائمة الصدق ما هي إلا طريقة بواسطتها نحدد قيمة صدق الدالة التي لدينا.

٦ ـ دوال الصدق Truth Functions

لاحظنا أن الثوابت المختلفة أدت إلى وجود دوال مختلفة وهي: دالة الوصل، ودالة الفصل، ودالة التضمن، ودالة التكافؤ، ودالة السلب، وأشرنا إلى أن لكل ثابت في هذه الدوال معناه المستقل. والآن يمكن أن نشير إلى معنى الثابت، ونحلل الدوال المختلفة باستخدام مفاهيم قيمة الصدق وقائمة الصدق.

أ ـ دالة الوصل (p . q):

إذا كانت قضيتنا هي « السماء ساطعة والجو صحو »، ورمز للقضية الأول « السماء ساطعة » بالرمز p، والقضية الثانية « الجو صحو » بالرمز q، فإن القضية المؤلفة منهما « السماء ساطعة والجو صحو » في صيغتها الرمزية المتكاملة تصبح (p . q). نلاحظ هنا أنه يوجد لدينا أربع احتمالات للصدق والكذب في إطار هذه الصيغة:

- صدق p ، q معاً.
- صدق p ، كذب q.
- كذب p، صدق q.
- كذب p، كذب q.

وتتحدد قيمة صدق دالة الوصل (p , q) على أساس معنى ثابت الوصل الذي ينص على أن « **دالة الوصل تكون صادقة فقط إذا صدقت q , p معاً، وتكذب فيما عدا ذلك** ».

ويمكن وضع الدالة في القائمة صدق تصميم بعدد المتغيرات والثابت الذي لدينا على النحو التالي:

p	.	q
T	T	T
T	F	F
F	F	T
F	F	F

نلاحظ من هذه القائمة أنه بتطبيق معنى ثابت الوصل على حالات صدق وكذب p , q، وجدنا أن الحالة الوحيدة التي صدقت فيها الدالة هي حالة صدق p , q معاً، وأن هناك ثلاث حالات للكذب هي:

- حالة صدق p، كذب q.
- حالة كذب p، صدق q.
- حالة كذب p، q معاً.

ب ـ دالة الفصل (p V q)

قيمة صدق دالة الفصل تتوقف على تطبيق معنى الفصل على حالات صدق وكذب p، q. وينص معنى الفصل على أن « **الدالة تصدق في حالة صدق p، q معاً، أو صدق واحدة وكذب الأخرى، وتكذب فقط في حالة كذبهما معاً** ». وبتطبيق هذا المعنى على حالات صدق وكذب p، q يمكن أن نحصل على القيم الآتية:

p	V	q
T	T	T
T	T	F
F	T	T
F	F	F

يلاحظ هنا أننا حصلنا على ثلاث قيم للصدق، وقيمة كذب واحدة في الحالة الأخيرة حيث كذبت p ، q معاً .

جـ ـ دالة التضمن $(p \supset q)$

تتحدد قيمة صدق دالة التضمن من خلال تطبيق معنى التضمن على حالات صدق p ، q . وينص معنى التضمن على أن « **الدالة تكذب فقط في حالة صدق p وكذب q وتصدق فيما عدا ذلك من الحالات** » . وهذا المعنى توضحه قائمة الصدق التالية :

p	⊃	q
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	T	F

د ـ دالة التكافؤ $(p \equiv q)$

ينص معنى التكافؤ على أن « **الدالة تصدق فقط في حالة صدق وكذب q , p معا، وتكذب في حالة صدق أحدهما وكذب الأخرى** » . ونحن نلاحظ أن حالات صدق وكذب p ، q معاً حالتان، وأن حالات صدق واحدة وكذب الأخرى حالتان أيضاً، ومن ثم فإن الدالة صادقة في حالتين وكاذبة في حالتين. وقائمة الصدق الآتية توضح هذا المعنى :

p	≡	q
T	T	T
T	F	F
F	F	T
F	T	F

هـ ـ دالة السلب (p ~)

تنص قاعدة هذه الدالة على أنه **إذا كانت القضية p صادقة، فإن p كاذبة، والعكس صحيح.**

p	~ p
T	F
F	T

لكن قد تواجهنا بعض دوال الصدق التي تحتوي على أكثر من متغيرين، فكيف نحدد حالات الصدق والكذب في هذه الحالة؟

إننا نعلم أنه إذا كان لدينا قضية واحدة ـ كما هو في حالة السلب ـ كانت لدينا قيمة صدق واحدة وقيمة كذب واحدة. أما إذا كان لدينا قضيتان فإننا نحصل على أربعة قيم للصدق والكذب. ولكن إذا كان لدينا أكثر من هذا العدد علينا أن نستعين بالقانون الآتي لتحديد قيم الصدق والكذب:

قيم الصدق = (٢) عدد القضايا

حيث يشير العدد ٢ الموضوع بين الأقواس إلى قيمتي الصدق والكذب.

أما عدد القضايا المشار إليه فوق القوس فيعتبر بمثابة الأس في الجبر العادي. مثل ذلك:

$$[(p \;.\; q) \supset (q \vee r)]$$

نلاحظ هنا أن لدينا p ، q ، r . ولكي نحصل على قيم الصدق علينا أن نطبق القانون السابق كالآتي:

قيم الصدق = (٢) عدد القضايا

وعدد القضايا التي لدينا = ٣

∴ قيم الصدق = (٢)^٣

= ٢ × ٢ × ٢ = ٨

أي أن لدينا ثماني قيم للصدق والكذب بالنسبة لكل قضية، نوزع هذه القيم على القضايا بالصورة الآتية:

(١) القضية الأولى p نعطيها ٤ قيم صدق تليها مباشرة ٤ قيم كذب.

(٢) القضية الثانية q نعطيها ٢ صدق ـ ٢ كذب ـ ٢ صدق ـ ٢ كذب على التوالي.

(٣) القضية الثالثة r نعطيها واحدة صدق ـ واحدة كذب... على التوالي.

وهذا التوزيع ينطبق على أي عدد من القضايا، ثم تصمم أعمدة القائمة الرأسية حسب عدد حالات الصدق والكذب تحت القضايا، كما تكون خانات القائمة الأفقية حسب عدد المتغيرات والثوابت معا.

الفصل الرابع

العلاقات المنطقية بين دوال الصدق

١ - تعريف دالة الوصل
٢ - تعريف دالة الفصل
٣ - تعريف دالة التضمن
٤ - تعريف دالة التكافؤ

إن من أدق أهداف نظرية حساب القضايا - فيما يتصل بدوال الصدق - تقديم العلاقات المنطقية بين الدالات وبعضها؛ كذلك تهتم النظرية ككل بوضع الدالات التي يمكن النظر إليها على أنها قضايا تحليلية. فإذا ما نظرنا في الجهاز المنطقي للبرنكيبيا اتضح لنا أن هناك مجموعة من التعريفات الأساسية هي:

١ - تعريف دالة الوصل (p . q)

$$p \cdot q = \sim (\sim p \vee \sim q) \qquad \text{Df. 1}$$

$$= \sim (p \supset \sim q) \qquad \text{Df. 2}$$

يشير الرمز Df إلى المصطلح تعريف definition.

في التعريف الأول نجد أنه تم تعريف دالة الوصل عن طريق **الفصل والسلب**. بمعنى أن قيم الصدق والكذب التي نحصل عليها تحت ثابت السلب الرئيسي خارج القوس في الطرف الأيمن تساوي تماماً قيم الصدق والكذب التي نحصل عليها تحت ثابت الوصل في الطرف الأيسر، أي في دالة الوصل.

وفي التعريف الثاني نجد أنه أمكن تعريف الوصل بدلالة التضمن **والسلب**، حيث القيم التي نحصل عليها تحت ثابت السلب الرئيسي خارج القوس في

الطرف الأيمن تساوي تماماً قيم الصدق والكذب تحت ثابت الوصل في الطرف الأيسر. وفي كل الحالات فإن القيم في الطرف الأيمن التي تساوي القيم الموجودة في الطرف الأيسر، لا بد وأن تناظرها تناظر واحدٍ ـ بواحد، فتكون أمام قيمة الصدق قيمة صدق مناظرة، وكذلك في حالة الكذب. ويمكن لنا أن نضع دالة الوصل وتعريفاتها في قائمة واحدة كما يلي:

التعريف الثاني **التعريف الأول**

p	.	q	=	(~	(p	v	~q)	=	~	(p	⊃	~q)
T	T	T		T	T	F	F		T	T	F	F
T	F	F		F	T	T	T		F	T	T	T
F	F	T		F	F	T	F		F	F	T	F
F	F	F		F	F	T	T		F	F	T	T
1	(2)	3	=	(4)	5	6	7	=	(8)	9	10	11

نلاحظ على تحليل الدالة وتعريفاتها ما يلي:

ـ أن التعريف الأول يكون عن طريق الحصول على قيمة الفصل بين p ، q داخل القوس، ثم تطبق على القيم الموجودة تحت ثابت الفصل في العمود رقم ٦ معنى السلب الموجود خارج القوس في العمود رقم ٤ ، فتصبح القيم الصادقة كاذبة، والكاذبة صادقة.

ـ أن التعريف الثاني يكون عن طريق الحصول على قيمة التضمن بين p ، q داخل القوس، ثم نطبق على القيم الموجودة تحت ثابت التضمن في العمود

رقم ١٠ معنى السلب الموجود خارج القوس في العمود رقم ٨ فنحصل على قيم التعريف.

- أن القيم في العمود رقم ٢ تساوي وتناظر تماما القيم الموجودة في العمود رقم ٤ في التعريف الأول والعمود رقم ٨ في التعريف الثاني.

- نستنتج من هذا صحة تعريف دالة الوصل بدلالة الفصل والسلب في التعريف الأول، وبدلالة التضمن والسلب في التعريف الثاني.

٢ - تعريف دالة الفصل (p V q)

$$p \vee q = \sim(\sim p \cdot \sim q) \qquad \text{Df. 3}$$

$$= \sim p \supset q \qquad \text{Df. 4}$$

في التعريف رقم ٣ نجد أنه تم تعريف دالة الفصل بدلالة الوصل والسلب. وفي التعريف رقم ٤ أمكن تعريف دالة الفصل عن طريق التضمن والسلب. ويمكن اكتشاف صحة التعريف ٣ والتعريف ٤ عن طريق وضع الدالة وتعريفاتها في قائمة صدق كما يلي:

التعريف الثاني التعريف الأول

p	q	p	V	q	=	~	(~p	.	~q)	=	~p	⊃	q
T	T		T			T		F				T	
T	F		T			T		F				T	
F	T		T			T		F				T	
F	F		F			F		T				F	

يلاحظ أننا طورنا قائمة الصدق التي لدينا بحيث وضعنا قيم p ، q بمفردها قبل القائمة، ثم قمنا في المرحلة التالية بتطبيق معنى الثابت في الدالة أو تعريفاتها مباشرة، وبذا لم نضع داخل القائمة سوى القيم الضرورية التي نحتاجها . ويستنتج من هذه القائمة أن القيم الموجودة تحت ثابت السلب في التعريف الأول، وهو الثابت الرئيسي، تساوي القيم الموجودة تحت ثابت الفصل في الدالة الأصلية والقيم الموجودة تحت ثابت التضمن في التعريف الثاني.

٣ ـ تعريف دالة التضمن $(p \supset q)$

$p \supset q = \sim p \vee q$ — Df. 5

$= \sim (p \cdot \sim q)$ — Df. 6

يشير التعريف رقم (٥) إلى أن قيم الصدق التي نحصل عليها تحت ثابت الفصل تساوي قيم الصدق تحت ثابت التضمن. وتعريف دالة التضمن على هذا النحو يتم عن طريق الفصل والسلب. وفي التعريف رقم (٦) نجد أنه أمكن تعريف دالة التضمن بدلالة الوصل والسلب، حيث يمثل السلب خارج القوس في هذا التعريف الثابت الرئيسي. ويمكن لنا تحليل دالة التضمن وتعريفاتها في قائمة صدق على النحو التالي:

التعريف الثاني   التعريف الأول

p	q	p	⊃	q	=	~p	V	q	=	~	(p	.	~q)
T	T		T				T			T		F	
T	F		F				F			F		T	
F	T		T				T			T		F	
F	F		T				T			T		F	

٤ - تعريف دالة التكافؤ $(p \equiv q)$

$p \equiv q = (p \supset q) \, . \, (q \supset p)$ Df. 7

$= \sim (p \, . \sim q) \, . \sim (q \, . \sim p)$ Df. 8

$= (p \, . \, q) \vee (\sim p \, . \sim q)$ Df. 9

نجد أنه أمكن تعريف دالة التكافؤ في التعريف رقم (٧) باستخدام التضمن والوصل، وفي التعريف رقم (٨) أمكن تعريفها بالوصل والسلب، وفي التعريف رقم (٩) أمكن تعريف الدالة عن طريق الوصل والفصل والسلب. نحلل الدالة وتعريفاتها أولا ثم نعلق عليها تفصيلا.

(أ) تحليل التعريف الأول

p	≡	q	=	(p	⊃	q)		(q	⊃	p)
T	T	T			T		T		T	
T	F	F			F		F		T	
F	F	T			T		F		F	
F	T	F			T		T		T	
1	(2)	3			4		(5)		6	

(ب) تحليل التعريف الثاني

p	≡	q	=	~	(p	.	~ q)	.	~	(q	.	~ p)
T	T	T		T	T	F	F	T	T	T	F	F
T	F	F		F	T	T	T	F	T	F	F	F
F	F	T		T	F	F	F	F	F	T	T	T
F	T	F		T	F	F	T	T	T	F	F	T
1	(2)	3		4	5	6	7	(8)	9	10	11	12

(جـ) تحليل التعريف الثالث

p	≡	q	=	(p	.	q)	V	(~ p	.	~ q)
T	T	T			T		T		F	
	F	F			F		F		F	
F	F	T			F		F		F	
F	T	F			T		T		T	

يلاحظ أننا نحصل على قيمة ثابت الوصل بين الأقواس في الطرف الأيمن من تطبيق معنى الفصل على القيم الموجودة تحت ثابت الفصل في القوس الأول والقوس الثاني معاً، فنجد أن قيم الفصل في الطرف الأيمن تساوي قيم التكافؤ في الطرف الأيسر.

لا شك أن تعريف دالة التكافؤ بدلالة التضمن قد يثير بعض التساؤلات، إذا عرفنا الدالة بدلالة التضمن والوصل، وهذا هو التعريف الوحيد الذي لم نستخدم فيه فكرة السلب. ولكن تعريف الدالة على هذا النحو يستخدم فكرة السلب ضمنا، لأن التضمن ذاته يعرف بدلالة السلب والفصل. وتعريف دالة التكافؤ رقم ٧ الذي ينص على أن:

$$p \equiv q = (p \supset q) \,.\, (q \supset p)$$

هذا التعريف يمكن وضعه بصورة أخرى بحيث يحتوي على السلب، إذ أن الصيغة $(p \supset q)$ تساوي الصيغة $\sim p \vee q$ والصيغة $(q \supset p)$ تساوي الصيغة $\sim q \vee p$، وبالتالي فإنه يمكن استبدال الطرف الأيمن بالصيغة $(\sim p \vee q) \,.\, (\sim q \vee p)$ فيصبح تعريف التكافؤ على النحو الآتي:

$$p \equiv q = (\sim p \vee q) \,.\, (\sim q \vee p)$$

ويمكن استنتاج أن القيم في الطرف الأيمن تساوي القيم في الطرف الأيسر إذا وضعنا التعريف ككل في قائمة صدق.

p	≡	q	=	(~ p	V	q)		(~ q	V	p)
T	T	T		F	T	T	T	F	T	T
T	F	F		F	F	F	F	T	T	T
F	F	T		T	T	T	F	F	F	F
F	T	F		T	T	F	T	T	T	F
1	(2)	3		4	5	6	(7)	8	9	10

نلاحظ أن القيم الموجودة لدينا تحت ثابت الوصل الرئيسي بين الأقواس في العمود رقم (٧) في الطرف الأيمن تساوي القيم الموجودة تحت ثابت التكافؤ في العمود رقم (٢) في الطرف الأيسر. إذن تحليل الدالة عن طريق هذا التعريف صحيح.

إن أهم ما نلاحظه على مجموعة التعريفات التي توصلنا اليها، أن ثابت السلب فيها جميعاً هو الثابت الرئيسي؛ وقد ورد في جميع التعريفات، حيث أمكن تعريف الدوال المختلفة باستخدامه، ومن ثم فإن فكرة السلب أولية وبسيطة ولا معرَّفة، بحيث يمكن تعريف الثوابت الأخرى عن طريق السلب، ولا يمكن تعريفها بدلالة أي ثابت آخر.

وأهمية التعريفات في البرهان على قضايا ونظريات المنطق الرياضي واضحة، إذ أنه إذا وجدنا أي صيغة مركبة في خطوات البرهان يمكن استبدالها بصيغة أخرى أبسط منها عن طريق التعريفات الموجودة لدينا، تماماً مثلما فعلنا في استبدال صيغة التضمن في التعريف السابق.

الفصل الخامس

نظرية حساب القضايا

١ ـ مدخل إلى النسق الاستنباطي
٢ ـ التضمن خاصية النسق الاستنباطي
٣ ـ مقدمات نظرية حساب القضايا

١ - مدخل إلى النسق الاستنباطي

فكرة التضمن Implication من أهم أفكار المنطق الرياضي، بل قد ينظر إليها في كثير من الأنساق على أنها الفكرة المحورية التي يدور حولها البحث في المنطق الرياضي بصفة عامة، ويرجع هذا إلى أمرين: أما الأول فيتمثل في أن المنطق الرياضي Mathematical logic يؤسس فكرته النسقية على أساس ما نسميه « النسق الاستنباطي » deductive System، وهذا النسق يستند بطبيعة الحال إلى فكرة التضمن. وأما الأمر الثاني فيبدو بوضوح في أن النظريات الأساسية في حساب القضايا يتم البرهنة عليها رياضياً باستخدام تعريف التضمن الذي ورد في « برنكيبيا ماتماتيكا » Principia Mathematica في القضية (1.01) والذي ينص على أن:

$$p \supset q = \sim p \vee q \qquad \text{df}$$

وقد يبدو من المناسب بمكان أن نلقى بعض الضوء على فكرة النسق الاستنباطي بصفة عامة - قبل أن نعالج موضوعات البحث - وأهميته وإدراكه عند مختلف المناطقة والرياضيين، ومكوناته الأساسية.

يقول العالم المصري الدكتور ثابت الفندى في نص هام أودعه مؤلفه القيم « فلسفة الرياضة »: « حقيقة أنه لا يوجد علم أكثر عراقة في تاريخه من فلسفة

الرياضة. فقد دخلت الرياضة مرحلة اليقين العلمي منذ أقدم المفكرين الذين حفظ لنا التاريخ أسماؤهم: طاليس وفيثاغور. كما أنه لا يوجد علم انحدر إلينا عبر القرون كبناء وثيق شاهد بالعبقرية العلمية للإنسان مثل هندسة الرياضي الإسكندري « إقليدس »[1]. هذا البناء الذي شيدت الرياضيات وفقا له هو ما نطلق عليه النسق الاستنباطي الذي ينطلق ابتداء من بديهيات Axioms وتعريفات definitions ومسلمات Postulates معينة ليبرهن على مجموعة من النظريات Theorems أو اللواحق Corolaries باستخدام قاعدة التعويض Substitution أو قاعدة إثبات التالي Modus Ponens.

فكأن ما يميز الرياضيات كعلم دقيق يتسم باليقين المطلق إنما هو ذلك البناء النسقي المحكم، أو ما يعرف بالنسق الاستنباطي الذي يستمد اليقين من كون الأصول التي يبدأ منها مستقلة independent عن الواقع التجريبي أو عالم الخبرة، ومن كونها قد صدرت عن العقل البحت ـ ولا شيء غير العقل البحت ـ وتخضع لشروطه.

لكننا نتحفظ على النص الذي ذكرناه للدكتور الفندى، فليست الرياضيات وحدها صاحبة اليقين، وإنما المنطق أيضاً، وربما لا يكون التفكير الرياضي أسبق نسقية من التفكير المنطقي أيضاً، إذ أن الرياضيات والتفكير الرياضي إنما يستند بالضرورة إلى الاتساق المنطقي، أو بمعنى آخر، لا بد وأن تكون الرياضيات خالية من التناقض حتى تأتي نسقيتها محكمة، ومن المعروف أن خاصية عدم التناقض خاصية منطقية وليست رياضية؛ فقانون عدم التناقض هو القانون المحوري الذي تأسس عليه علم المنطق بأسره، وهو ثاني قوانينه. ومنذ اكتشفت بعض المخالفات Paradoxes الرياضية بدأ علماء

(١) الدكتور محمد ثابت الفندى، فلسفة الرياضة، دار النهضة العربية، بيروت، ١٩٦٩، ص ١٣.

الرياضيات والمنطق يتحدثون عن التناقضات Contradictions ، وهو ما نألفه في كتابات رسِّل Russell وغيره من الكتاب.

كذلك فإن أقدم نسق منطقي متكامل عرفته البشرية على الإطلاق واستخدم فكرة النسق الاستنباطي هو نسق المنطق الأرسطي الذي أودعه أرسطو نظرية القياس: قد لا تكون الرياضيات أقدم وأعرق تاريخاً من المنطق، لأن الرياضيات لم تنتظم في نسق استنباطي محكم إلا في عصر إقليدس (٣٠٠ ق.م) على ما يذكر الدكتور الفندى. ومن الواضح أن فكرة النسق الاستنباطي متحققة عند أرسطو (٣٨٤ - ٣٢١ ق.م) في نظرية القياس، وهو ما يجمع عليه المناطقة ومؤرخو الفكر المنطقي. وقد استطاع « هيث » Heath أن يلخص لنا موقف أرسطو من فهم النسق الاستنباطي في عبارة يقول فيها نقلا عن أرسطو « إن كل علم برهاني يجب أن يبدأ من مقدمات لا مبرهن عليها. وإلا فإن خطوات البرهان ستكون لا نهائية. أما عن الأصول اللا - مبرهن عليها فإن بعضها (أ) عام بالنسبة لكل العلوم، وبعضها الآخر (ب) خاص أو متعلق بالعلم الخاص. أما الأصول العامة فهي البديهيات ويمكن شرحها عن طريق البديهية القائلة: إذا طرحنا أشياء متساوية من أشياء متساوية فإن النواتج ستكون متساوية أيضاً. أما فيما يتعلق بـ (ب) فإن لدينا أولا الجنس أو الموضوع الذي يجب افتراض وجوده »[١].

وما يعنيه أرسطو بما هو عام بالنسبة لكل العلوم يتمثل في المبادىء الثلاثة المعروفة وهي مبدأ الذاتية ومبدأ عدم التناقض ومبدأ الثالث المرفوع. أما ما يقصده بالأصول الخاصة بكل علم من العلوم، خاصة الرياضيات فيتمثل في:

---

(١) Heath, T.L., **The Thirteen Books of Educlid's Elements,** Cambridge, England, The university press, 1908, 1, 119.

١ ـ التعريفات وهي « قضايا تشرح معنى الحدود الأولية ولا يقال لها صادقة أو كاذبة »[١].

٢ ـ البديهيات وهي ما تسمى أحياناً (الأصول الموضوعة) أو العلوم المتعارفة، وتتسم البديهية بأنها « قضية لا برهان عليها وواضحة في ذاتها حتى لكأنما الإنسان يعرفها دائماً إذا ذكرت أمامه كما أنه لا غنى عنها لمن يريد التعلم »[٢].

٣ ـ المسلمات وهي قضايا « لا برهان عليها ولكنها تختلف عن الأصل المتواضع عليه في أنها ليست بينة في ذاتها ويجد المتعلم عناداً في قبولها ومن ثم فهو يصادر بها حتى تتضح له فيما بعد »[٣].

ومع هذا فإن أرسطو لم يمضي في تحليله لنسق العلم الرياضي، لأن ما كان يعينه في المقام الأول هو نظُرية القياس، ولم يكن بصدد بحث العلم الرياضي؛ وهذا لا يعني جهله بالرياضيات على الإطلاق، فنحن نعلم أنه تلقى علومه في الأكاديمية على استاذه أفلاطون إبان دور النشأة والتكوين، فنهل عنه بقدر ما استطاع. ونعلم أيضاً أن دوراً كبيراً كان للرياضيات في الأكاديمية، بل إن أفلاطون كان يجد في الاستدلال الرياضي خير معين في البرهنة على وجود عالم المثل. فكأن أرسطو « نشأ منذ البداية نشأة فكرية ذات طابع رياضي، ومن ثم فإن معرفة أرسطو بالرياضيات السائدة في عصره، ودوره وعلماء الليسيه في تقدمها وجمعها، وبصفة أخص تحليله هو نفسه لأسسها وأصولها مما تجمعه كلمة المنهج الرياضي أمر لا مجال للشك فيه »[٤].

---

(١) الدكتور محمد ثابت الفندى؛ المرجع السابق: ص ٤٤.

(٢) المرجع السابق، ص ٤٣

(٣) المرجع السابق، الموضع السابق

(٤) المرجع السابق ص ٤٣

وإقليدس Euclid عالم الرياضيات المشهور - واضع أول نسق هندسي Geometrical System استنباطي سار جنباً إلى جنب مع المنطق الأرسطي لأكثر من ألفي عام - قرأ أرسطو ووقف على أصول نظريته في القياس(١)

---

(١) يذهب أرسطو في الكتاب الأول من التحليلات الأولى إلى تعريف القياس بصورة عامة قائلا هو « قول متى قررت فيه أشياء معينة نتج عنها بالضرورة شيئاً آخر مختلف عما سبق تقريره ».

Aristotle, Analytica Priora, Book. 1,24 b 20

ثم يميز بين نوعين من القياس: التام Perfect والناقص Imperfect بقوله القياس التام هو الذي لا يتطلب ما يجب عن مقدماته إلى تقرير شيء غيرها، والقياس الناقص هو الذي يتطلب في بيان ذلك تقرير شيء أو أشياء مما يجب عن مقدماته، ولكن هذه الأشياء لم تكن مقررة في المقدمات.

Aristotle, Ibid, Book. 1. 24 b 22

وعلى أساس هذا التمييز حدد أرسطو صورة القياس بدقة في نهاية الكتاب الأول من التحليلات الأولى قائلا: إن كل برهان وكل قياس يتقدم ابتداء من ثلاثة حدود فقط، وهذا بيِّن بذاته. فمن الواضح أن النتيجة القياسية تنتج من مقدمتين، وليس أكثر من ذلك؛ لأن الحدود الثلاثة تؤلف مقدمتين، إذا لم تفترض مقدمة جديدة (Ibid, Book. 1, 24 a 30 - 35) وفي هذا التعريف الأخير ينص أرسطو صراحة على أن القياس يتألف من عناصر أساسية هي: (أ) الحدود الثلاثة: الأكبر - الأصغر - الأوسط. (ب) المقدمتين: المقدمة الكبرى - المقدمة الصغرى. (جـ) النتيجة، وتلزم عن المقدمتين وترتبط بها ارتباطاً ضرورياً. ويمكن لنا أن ننظر في صورة القياس العامة من خلال المثال الآتي:

كل حيوان فان
كل انسان حيوان
كل انسان فان

نلاحظ من صورة القياس العامة التي أمامنا أن النتيجة التي توصلنا إليها تنتج ضرورة عن اجتماع المقدمتين أو الارتباط بينهما. والضرورة التي يعنيها أرسطو هنا هي الضرورة المنطقية logical necessity. فالحد الأوسط يمثل الرابطة Copula المشتركة بين الحدين الأكبر والأصغر بما يظهرهما معاً في النتيجة.

Syllogism . واستفاد من كل رأى ذكره صاحب المنطق وواضعه الأول، فأسس نسق الهندسة على متن مقدمات أساسية تتمثل في البديهيات والتعريفات والمسلمات التي نقبلها بدون برهان، ونسلم بها تسليماً لأنها أبسط الأشياء وأوضحها للعقل الرياضي، ولا يمكن التوصل إلى ما هو أبسط منها .

مقدمات النسق الاقليدي (١)

أولا : البديهيات

١ ـ الأشياء المساوية لشيء واحد متساوية .

٢ ـ إذا أضيفت أشياء متساوية إلى أشياء متساوية كان الناتج متساوى .

٣ ـ إذا طرحت أشياء متساوية من أشياء متساوية كان الناتج متساوى .

٤ ـ بإضافة أشياء متساوية إلى أشياء غير متساوية نحصل على نواتج غير متساوية .

٥ ـ بطرح أشياء متساوية من أشياء غير متساوية نحصل على نواتج غير متساوية .

٦ ـ أضعاف الشيء الواحد متساوية .

٧ ـ أنصاف الشيء الواحد متساوية .

٨ ـ المقادير التي ينطبق الواحد منها على الآخر متساوية .

٩ ـ الكل أكبر من الجزء .

---

(١) Heath, T.L.,op. cit, Book I.

ثانياً: التعريفات.

١ ـ النقطة هي ما ليس له أجزاء.
٢ ـ الخط طول بلا عرض.
٣ ـ حـدّا الخط نقطتان.
٤ ـ المستقيم يقع بين نقطتي نهاية.
٥ ـ السطح له طول وعرض فحسب.
٦ ـ الخطوط هي نهاية السطوح.
٧ ـ السطح المستوى هو الذي يقع عليه أي خط مستقيم.
٨ ـ الزاوية المستوية تنشأ من ميل خطين متقابلين الواحد منهما على الآخر، بحيث يكون لكل خط اتجاه مخالف للآخر. وهكذا.

ثالثاً: المسلمات

١ ـ يمكن رسم مستقيم واحد بين نقطتين.
٢ ـ يمكن مد مستقيم إلى أي طول.
٣ ـ يمكن رسم دائرة من أي مركز.

ولم يضع اقليدس سوى هذه المسلمات الثلاثة، لكن الشراح فيما بعد عصر إقليدس أضافوا مسلمات أخرى جديدة ونسبوها لصاحب الهندسة، ومن بين المسلمات التي أضيفت ونسبت إلى إقليدس تلك المسلمة المشهورة بالمسلمة الخامسة (أو ما يعرف أحياناً بالمصادرة الخامسة) التي يطلق عليها مسلمة التوازي.

لقد أثبت إقليدس في كتاب (الأصول) أنه يمكن بناء النسق الرياضي بصورة دقيقة ابتداء من هذه المقدمات البسيطة المقبولة لدى العقل لشدة وضوحها؛ كما بيَّن أيضاً أن بناء النسق يتحقق بالبرهان الذي يتقدم من

البسيط إلى المعقد ثم الأكثر تعقيداً، فيبرهن على النظريات البسيطة ثم يتدرج منها إلى نظريات معقدة، وينتقل من هذه وتلك إلى النظريات الأشدّ تعقيداً، وهكذا.

نستنتج من هذا أن أرسطو وإقليدس يتفقان معاً على وجود مقدمات معينة يجب أن يبدأ منها العلم الرياضي مسيرة البرهان، وهذه المقدمات هي البديهيات والتعريفات والمسلمات. وقد ظلت هذه الفكرة تواكب مسيرة التطور العلمي عبر تاريخ الرياضيات حتى حدثت أزمة الرياضيات في القرن التاسع عشر، وبدأ علماء الرياضة يشكون من التصور الإقليدي للهندسة، فظهرت الأشكال الأخرى من الهندسات الجديدة التي تعرف بالهندسات اللا ـ إقليدية non - eucildean. ومن جانب آخر بلغت التطورات المنطقية ذروتها أيضاً في نهاية النصف الثاني من القرن التاسع عشر وامتزجت الرياضيات بالمنطق إلى حد كبير، وتغلغل المنطق في بناء الرياضيات البحتة حتى كانت بداية القرن الحالي التي شهدت أروع الإنجازات التي قدمها العقل البشري متمثلة من « برنكيبيا ماتيماتيكا » أو « مبادىء الرياضيات » Principia Mathematica (١٩١٠ ـ ١٩١٣) الذي دونه برتراند رسِّل والفرد نورث هوايتهد.

٢ ـ التضمن خاصية النسق الاستنباطي

لقد ظل المنطق حتى نهاية القرن التاسع عشر بحاجة لعقلية عبقرية مبدعة تنظم أبحاثه، وتجمع شتات نظرياته. وكانت شرارة الانطلاق نحو تحقيق هذا الهدف من مؤتمر باريس الدولي للفلسفة الذي عقد في منتصف عام ١٩٠٠، وخصصت حلقته البحثية للرياضيات. وقد وجهت الدعوة لرسِّل وزميله الرياضي هوايتهد ـ إمام الرياضيين في عصره ـ لحضور المؤتمر والإسهام في

أعماله. وما أن انعقدت جلسات المؤتمر حتى التقى رسِّل بالرياضي الإيطالي « جيوسيب بيانو » ـ وكان رسِّل قد قرأ له بعض أعماله؛ إلا أنه لم يهتم بها اهتماماً كبيراً ـ فوجده متحدثاً بارعاً، يمتاز بعقلية منظمة يتضح أثرها في براهينه التي اتسمت بدقة التحليلات الرياضية والمنطقية، مما دفع رسِّل إلى الحصول على مؤلفاته وكتاباته التي انصرف لقراءتها والوقوف على دقائق تفصيلاتها، وهنا تمكن رسِّل من استنباط أداة جيدة للتحليل المنطقي، وهو ما كان يبحث عنه لفترة طويلة.

وبعد انتهاء أعمال المؤتمر عاد رسِّل إلى إنجلترا وكرس كل وقته وجهده لإنجاز ما تبقى من كتاب « أصول الرياضيات » Principles of Mathematics الذي شرع في كتابه أثناء فترة المؤتمر، وكان أن أصدره في عام ١٩٠٣، واعتبر آنذاك عملا عبقرياً فذاً، وإضافة أصيلة للمنطق والرياضيات وبطبيعة الحال فإن إصدار « أصول الرياضيات » لم يكن يعني أن صياغة المنطق الرياضي تبلورت بصفة نهائية رغم ما ذهب إليه رسّل من أن « القضية الأساسية التي تجري خلال صفحات الكتاب، وهي أن الرياضة والمنطق متطابقان، من القضايا التي لا أجد سبباً منذ إعلانها لتعديلها »[1]، من أجل هذا أخذ رسّل يوجه جهوده المضنية نحو تأسيس المنطق الرياضي كنسق استنباطي، فتعاون مع « هوايتهد » لإنجاز هذا العمل، وأثمر جهدهما المشترك كتاب « مبادىء الرياضيات » الذي نعرفه باسم « برنكيبيا ماتياتيكا » وبذا أصبح كتاب الأصول يمثل « قيمة تاريخية من جهة أنه يمثل مرحلة معينة في الموضوع الذي يعالجه »[2].

والواقع أن « برنكيبيا » يُعد حدثاً هاماً في ميدان المنطق والرياضيات،

---

(١) برتراند رسّل؛ أصول الرياضيات، المقدمة ص ٥.

(٢) المرجع السابق، الموضع السابق.

وأنه على حد قول « أير » Ayer ، « لعب دوراً هاماً في تطور المنطق الرياضي »[١] ، فضلا عن أنه يمثل مرحلة حاسمة بالنسبة للدراسات المنطقية والرياضية بحيث يمكن القول: إن ظهور البرنكيبيا يقسم تاريخ المنطق الرياضي قسمين: ما قبل البرنكيبيا ، وما بعد البرنكيبيا . فالتصورات المنطقية التي تم التعبير عنها باستخدام اللغة في أصول الرياضيات أمكن صياغتها في البرنكيبيا من خلال نسق متكامل من الرمزية: الرمزية تلعب دوراً هاماً في المنطق والرياضيات ، لأن الرموز Symbols تعبر عن درجة عليا من درجات التجريد الفكري فيمكن عن طريقها تحويل الصورة اللغوية للقضية المنطقية إلى صورة رياضية بحتة يسهل استخدامها . أضف إلى هذا أن من أدق خصائص الرموز قابليتها للتداول العالمي بما يقضي على صعوبات التفاهم بين اللغات المختلفة ، إلى جانب ما تتسم به الرموز من الدقة والإيجاز والنسقية[٢] .

والقول بأن النسق المتكامل لبرنكيبيا يستند إلى الاستنباط Deduction ، يعني أنه أمكن في « مبادىء الرياضيات » استنباط الرياضة البحتة Pure Mathematics من أصول منطقية . والاستنباط يعتمد على علاقة التضمن التي تضفي على النسق الاستنباطي مشروعيته[٣] .

وفكرة التضمن قديمة قدم المنطق ذاته ، كما نعلم ، فقد شيد أرسطو نظرية القياس على متنها ، كما أشار سكتوس إمبريقيوس لطبيعة التضمن ، وفي العصر الحديث كشف تشارلز بيرس عن مزايا التضمن وأهميته . لكن أبحاث المنطق الرياضي في القرن العشرين توجت بأعظم ابتكارات رسِّل المنطقية ، فقد

---

(١) Ayer, A.J., An Aprisal of Bertrand Russell's Philosophy, p. 171

(٢) راجع أهمية استخدام اللغة الرمزية والرموز:

- Stebbing. S. L., A **Modern Introduction to Logic**, pp. 115-121.

- د. عزمي إسلامي؛ أسس المنطق الرمزي، ص ١٧ - ص ٢٤.

(٣) Whitehead, A N & Russell, B., **Principia Mathematica**, p. 90.

« كان أول من اكتشف أن نسق المنطق ككل يمكن أن يتطور من خلال فكرة التضمن »[1] بـإقـامـة التمييـز بين التضمـن المادي Material Implication والتضمن الصوري Formal Implication باعتبارهما أساسين للاستنباط الذي يعرفه بأنه « عملية ننتقل فيها من العلم بقضية معينة هي المقدمة، إلى قضية أخرى معينة هي النتيجة. لكن لن نضع في اعتبارنا أن هذه العملية استنباط منطقي ما لم تكن صحيحة، أي إذا لم توجد هناك علاقة بين المقدمة والنتيجة تبيح لنا « الاعتقاد » في صحة النتيجة إذا عرفنا أن المقدمة صحيحة ـ وهذه « العلاقة » هي محور الاهتمام في النظرية المنطقية للاستنباط »[2] وهي ما نطلق عليه علاقة التضمن Implication Relation.

وتعريف رسّل للاستنباط له جانبان: الأول، أنه يقرر وجود عنصر سيكولوجي ضمن خطوات الاستنباط. والثـاني، أنـه يثبـت وجـود علاقـة منطقية يمكن بفضلها أن ننتقل من المقدمة إلى النتيجة، ومع هذا فإن وجود العلاقة بين المقدمة والنتيجة في عملية الاستنباط يمثل شرطاً ضرورياً فحسب للانتقال من المقدمة، أو المقدمات، إلى النتيجة انتقالا صحيحاً، لكنه ليس شرطاً كافياً؛ لأننا في عملية الاستنباط نضع في اعتبارنا العنصر السيكولوجي من حيث علاقة المفكر بالقضايا الموجودة لديه كمقدمات، والتي تجعله يعتقد أن هذه القضايا مرتبطة، ويستـدل مـن إحـداهـا على الأخـرى استـدلالا صحيحاً، وهذا ما يجعلنا نقول: إن علاقة التضمن هي الأساس المنطقي للاستنباط ومحور النظرية ككل وبدونها لا يعد الاستدلال صحيحاً. فإذا وجدت علاقة التضمن ضمن خطوات الاستنباط فإن المقدمة تتضمن النتيجة، وبالتالي تلزم النتيجـة عن مقدمتها. وهاك بعض الأمثلة التي توضح علاقة التضمن.

---

(١) Reichenbach. H., Bertrand Russell's Logic, p. 26.

(٢) برتراند رسّل؛ مقدمة للفلسفة الرياضية، ص ١٤٥ - ص ١٤٦.

(١) إذا كان هذا أحمر فإنه ملون

(٢) إذا كان ا والد ب فإن ب ابن ا

(٣) إذا كان حـ، ب لهما نفس الوالدين، حـ ذكر، فإنَّ حـ أخ ب.

من النظر في الأمثلة المتقدمة نجد أن كل قضية مكونة من جزأين. الأول هو ما نطلق عليه المقدم Antecedent. أما الثاني فهو ما يعرف بالتالي Concequent وهو ما يلزم لزوماً منطقياً عن المقدم. وأي من الصور الثلاث للقضايا التي أمامنا يمكن وضعه على الصورة التالية:

هذا أحمر ← مقدم

هذا ملون ← تالي

نلاحظ أيضاً أن العلاقة بين المقدم والتالي علاقة تضمن ضروري، وأن المقدم في الأمثلة السابقة مسبوقاً بأداة الشرط «إذا» if، والتالي يأتي بعد كلمة «فإن» then؛ أي أن المقدم والتالي يقومان بين السور «إذا... فإن...» «if... then...». وهذا السور هو ما يشير في المنطق الرياضي إلى علاقة التضمن. فإذا رمزنا لمقدم القضية بالرمز p، وللتالي بالرمز q على اعتبار أن p، q.... متغيرات، فإن القضايا السابقة تأخذ الصورة التالية:

«if p then q»

ولما كانت «if... then...» تعني يتضمن imply، فإنه يمكن الاستغناء عن السور «if... then...» ونضع بدلا منه لفظة يتضمن imply، فتأخذ القضية الصورة:

p imply q

أو

ق تتضمن ل

ولما كان المنطق الرياضي يهتم بتناول عملياته وقضاياه من خلال نوعين من الرموز هما: المتغيرات والثوابت، وكان لا بد من وضع ثابت منطقي يدل على التضمن بين p ، q أو بين ق، ل وهو ما يرمز له بالعلامة (⊃) التي إذا وضعت مكان كلمة تتضمن أصبحت صورة القضية السابقة معبراً عنها بالمتغيرات والثوابت كما يلي:

$$p \supset q$$

أو

ق ⊂ ل

هذا النوع من التضمن يطلق عليه التضمن المادي، وهو يختلف عن التضمن الصوري اختلافاً بيناً، لأن التضمن الصوري أشمل وأعم من التضمن المادي. خذ المثال الآتي ليعبر عن التضمن الصوري:

« كل الناس فانون »

هذه الصيغة تقرر تضمناً صورياً يختلف عن التضمن المادي الذي ألفناه في الأمثلة السابقة، حيث توجد قيم مجهولة لم تتعين بعد، ونحن نحصل على التضمن بعد تقرير كل قيمة من القيم المجهولة. فإذا كانت إحدى القيم المجهولة لدينا هي س ـ أو × ـ فإن القضية « كل الناس فانون » تصبح كما يلي:

(« س إنسان » تتضمن مادياً أن « س فان »)

فإذا وضعنا سقراط بدلا من س، كانت قضيتنا هي:

« سقراط إنسان » تتضمن مادياً أن « سقراط فان »

أي أنه:

« ليست هي الحالة أن « سقراط إنسان » صادقة، « سقراط فان » كاذبة »

بناء على ما تقدم كان التمييز بين التضمن المادي والتضمن الصوري [١]: التضمن المادي نوع متميز تماماً ومختلف أشد الإختلاف عن التضمن الصوري، وهما معاً أساسيان للاستنباط. هذا إلى جانب أن علاقة التضمن المادي هي تلك التي بفضلها نتأتى إلى الاستنباط الصحيح لأنها علاقة تقوم بين القضايا، على حين أن التضمن الصوري يقوم بين دوال القضايا Propositional Functions التي تحتوي على قيم مجهولة إذا تم تعيينها أصبحت دوال القضايا التي لدينا قضايا [٢]. وهذا التمييز كما يرى رسِّل له أهميته، لأن « عادة الاحتفاظ بدوال القضايا منفصلة عن القضايا أمر ذو أهمية قصوى، والفشل في تحقيق هذا الفصل في الماضي كان أمراً مشيناً للفلسفة » [٣]. ولكن مع أن التمييز بين التضمن المادي والتضمن الصوري، أو بين القضايا ودوال القضايا أصبح ممكناً؛ إلا أن فكرة التضمن في حد ذاتها من الأفكار اللامعرَّفة.

هناك مسألة أخرى لا بد من تناولها قبل أن نعرض للنسق الاستنباطي لحساب القضايا وكيفية البرهنة، وهي موقف رسِّل من مبحث القضايا في إطار المنطق الرياضي. إن رسِّل يضع القضايا في تصنيفات خمس أساسية هي [٤]: القضية الذرية Atomic Proposition والقضية الجزيئية [١] Molecular والقضية العامة General والقضية الوجودية Existential والقضية العامة عمومية تامة Completely General.

---

(١) راجع في هذا التمييز: برتراند رسِّل، أصول الرياضيات، ص ٤٦، ص ٧٤، ص ٨٥.

(٢) سنتناول دوال القضايا بالشرح حين نعرض لنظرية حساب المحمول في الفصل الأول.

(٣) برتراند رسِّل، مقدمة للفلسفة الرياضية، ص ١٦٦.

(٤) فضلنا ترجمة المصطلح Molecular Proposition بالترجمة العربية « القضية الجزيئية » لأن رسِّل استوحى هذا التعبير من الفيزياء الذرية والكيمياء، حيث إذا اتحدت ذرتان معاً فإنهما يكونان الجزيء. بالإضافة إلى هذا فإنه لا بد من تمييز هذا النوع من القضايا عن تلك التي يتحدث عنها كينز ويسميها بالقضايا المركبة Compound Propositions.

أما القضية الذرية فهي أبسط أنواع القضايا، وتعبر عن واقعة ذرية بسيطة Atomic Fact، وهي الصورة الأساسية التي يقوم عليها الجهاز المنطقي للبرنكيبيا. يقول رسّل إن من أدق خصائص القضايا الذرية أنها لا تحتوي أجزاء تكون في حد ذاتها قضايا، ولا تحتوي مفاهيم مثل «كل» all أو «بعض» Some[1]. كما أنها قضية تنسب صفة من الصفات لشيء ما، أو تقرر وجود علاقة ما بين مجموعة من الأشياء[2]. وهذه الأشياء التي تشير إليها القضية الذرية تعبر عن الأفراد Individuals الجزئية الموجودة في العالم الخارجي. والجزئي Particular، كما يعرفه رسّل، هو «أي شيء يمكن أن يكون موضوعاً للقضية الذرية»[3]، وهذا الموضوع هو اسم العلم[4] Proper Name - ومن أمثلة القضايا الذرية «هذا أحمر»، «هذا أسبق من ذلك»، «هذا قبل ذلك».

لكن القضية الجزيئية، على عكس القضية الذرية، تقوم على فكرة الروابط أو الثوابت المنطقية، لأنها «تحتوي قضايا أخرى يمكن تسمية ذراتها»[5]، كما أنها تحتوي كلمات مثل «أو» or، «إذا» if، «إذا... فإن...» «if... then...»، أي أن هذا النوع من القضايا يقوم على فكرة الربط بين قضيتين ذريتين في قضية مركبة واحدة من خلال الثوابت المنطقية التي تربط بين القضايا وبعضها.

---

(١) **Principia Mathematica,** Introduction, p. xv.

(٢) Ibid

(٣) Ibid, p. xix

(٤) راجع: محمود فهمي زيدان؛ المنطق الرمزي: نشأته وتطوره، ص ١٧٨، ص ١٨١.

(٥) Russell, B., The Philosophy of Logical Atomism, p. 207.

٣ ـ مقدمات نظرية حساب القضايا

ذهبنا في بداية هذا الفصل إلى أن الجهاز الاستنباطي لبرنكيبيا يعتمد على علاقة التضمن باعتبارها علاقة أساسية؛ إلا أن هذا لا يعني أن نسق برنكيبيا لا يضمن جهازه الاستنباطي سوى هذه الفكرة، وإنما يعني أن علاقة التضمن بالإضافة إلى بعض الأفكار والقضايا الأخرى الأساسية تتآزر معاً لتجعل النسق على درجة من الإحكام بحيث يمكن التوصل من خلال النسق إلى كل الصيغ المنطقية، إذا اتبعت القواعد المنطقية. وفي هذا يشترك النسق الرياضي المنطقي لبرنكيبيا مع الأنساق الرياضية الأخرى، حيث نجد نقطة البدء في أي نسق رياضي أو منطقي متماسكة ومحكمة بدرجة يستطيع معها الرياضي أو المنطقي أن يصل إلى البرهنة الدقيقة على قضايا النسق.

والقسم الأول من نظرية الاستنباط في برنكيبيا يشير إلى أن النظرية تبدأ بالأفكار والقضايا الابتدائية، فيتناول الأفكار الابتدائية أولا، ثم ينتقل بعد ذلك إلى القضايا الابتدائية.

١ ـ الأفكار الابتدائية

وهي ثلاثة أفكار أساسية بالإضافة إلى تعريف يبدأ منه النسق:

أ ـ أن القضايا الأولية **Elementary Propositions** التي لا تتضمن متغيرات، أو لا تحتوي على كلمات مثل «كل» و«بعض»، يشار إليها بالحروف اللاتينية p، q، r ... (وسوف نشير إلى هذه الحروف في الرمزية العربية بالحروف ق، ل، م،...)، وأي تأليفات من هذه القضايا عن طريق النفي أو الوصل أو الفصل هي أيضاً قضايا أولية.

ب ـ دوال القضايا الأولية **Elementary Propositional Functions** وهي

تعبير يحتوي على مكوّن غير محدد، أي متغير. فإذا كانت p (أو ق) قضية أولية غير محددة، فإن p ~ (أي ~ ق) أو (لا – ق) قضية أولية.

جـ - التقرير Assertion ويشير النسق كذلك إلى القضية الصادقة أو المقررة بعلامة تسبق القضية مباشرة وهي (⊢). وكان فريجه أول من استخدم علامة التقرير، ثم استعارها رسّل وهوايتهد في برنكيبيا. لكن فتجنشتين أشار في الرسالة Tractatus إلى أن علامة التقرير ليس لها معنى. ولذا فإننا سوف نتبع رأي فتجنشتين ونحذف علامة التقرير التي تسبق القضية الصادقة.

التعريف

لقد أشار نسق برنكيبيا إلى تعريف هام يقوم عليه النسق ككل، وهو تعريف التضمن بدلالة السلب والفصل على النحو التالي:

$p \supset q \quad = \sim p \vee q$ Df 1.01

أو

١,٠١ ق ⊂ ل =~ ق V ل تعريف

٢ - القضايا الابتدائية

وهي قضايا واضحة وبسيطة ولشدة وضوحها يبدأ منها البرهان على نظريات النسق الاستنباطي في نظرية حساب القضايا، وقد افترضت هذه القضايا أصلا بدون برهان، وهذا ما يجعلها بمثابة مصادرات Postulates رغم أنها تقبل البرهان. والقضايا من هذا النوع يشار إليها بالرمز P_p أي ق ق ويعني قضية ابتدائية، وهي:

١,١ أي شيء تتضمنه قضية أولية صادقة فهو صادق ق ق

١,١١ اذا أمكن تقرير ϕ x (أي هـ س) حيث x أو (س) متغير حقيقي، وأمكن تقرير أن $\phi x \supset \psi x$ (أي هـ س ⊂ ع س)، حيث x أو (س) متغير حقيقي أيضاً، فإنه يمكن تقرير ψ x (أي ع س) حيث x (أي س) متغير حقيقي. ق ق

وينبغي أن نلاحظ أن هذه القضية تستخدم في كل استدلال ينتقل من دالة قضية مقررة إلى أخرى.

١,٢ مبدأ تحصيل الحاصل Principle of Tautology الذي ينص على أنه « إذا كانت ق أو ق قضية صادقة فإن ق صادقة » والصورة الرياضية لهذا المبدأ هي:

ق v ق ⊂ ق ق ق

١,٣ مبدأ الإضافة Principle of Addition وينص هذا المبدأ على أنه « إذا كانت ل صادقة فإن ق أو ل صادقة » وصورته الرياضية:

ل ⊂ ق v ل ق ق

١,٤ مبدأ التعديل Principle of Permutation حيث « إذا كانت ق أو ل صادقة فإن ل أو ق صادقة »، وصورته الرياضية:

(ق v ل) ⊂ (ل V ق) ق ق

١,٥ مبدأ الترابط Associative Principle حيث « إذا كانت ق أو (ل أو م) صادقة فإذن تكون ل صادقة أو (ق أو م) صادقة » وصورته الرياضية:

[(م v ل) v ق] ⊂ [(م v ق) v ل]　　ق ق

١,٦ مبدأ الجمع Principle of Summation حيث « إذا كانت ق صادقة أو (ل أو م) صادقة فإذن تكون ل صادقة أو (ق أو م) صادقة » وصورته الرياضية:

(ل ⊂ م) ⊂ [(ق v ل) ⊂ (ق v م)]　　ق ق

وينبغي أن نلاحظ أن هذه المجموعة من القضايا تعد بمثابة المصادرات أو أصول الاشتقاق في النسق الاستنباطي لبرنكيبيا، وهي تمثل الصدق المنطقي الابتدائي، حيث نبدأ البرهنة على نظريات النسق ابتداء منها بالإضافة إلى تعريف التضمن في القضية ١,٠١ وباستخدام القضية ١,١ التي تنص على أن أي شيء تتضمنه قضية أولية صادقة فهو صادق، وهذه القضية هي ما نعبر عنه بقاعدة إثبات التالي Modus Ponens.

ويترتب على المصادرات المذكورة سابقاً بعض النتائج التي تنتج مباشرة من النظر في صور القضايا الابتدائية ونبرهن عليها ابتداء منها، وهي:

١ ـ مبدأ التبسيط Principle of Simplification الذي تشير إليه القضية (٢,٠٢) وينص على أن:

ل ⊂ ق ⊂ ل

٢ ـ مبدأ النقل Principle of Transposition الذي تشير إليه القضايا (٢,٠٣، ٢,١٥، ٢,١٦، ٢,١٧) في الصور الأربع التالية:

(ق ⊂ ~ ل) ⊂ (ل ⊂ ~ ق)

(~ ق ⊂ ل) ⊂ (~ ل ⊂ ق)

(ق ⊂ ل)　　⊂ (~ ل ⊂ ~ ق)

(~ ل ⊂ ~ ق) ⊂ (ق ⊂ ل)

٣ ـ مبدأ تبادل المواضع Principle of Commutative الذي تنص عليه القضية (٢,٠٤) وصورته:

[ق ⊂ (ل ⊂ م)] ⊂ [ل ⊂ (ق ⊂ م)]

٤ ـ مبـدأ القيـاس Principle of Syllogism وفيـه صـورتين تشير إليهـا القضيتين (٢,٠٥، ٢,٠٦) وهما:

(ل ⊂ م) ⊂ [(ق ⊂ ل) ⊂ (ق ⊂ م)]

(ق ⊂ ل) ⊂ [(ل ⊂ م) ⊂ (ق ⊂ م)]

٥ ـ مبدأ الذاتية Principle of Identity الذي تشير اليه القضية (٢,٠٨) وصورته:

ق ⊂ ق

والسؤال الآن: إذا كانت النتائج المباشرة تنتج من النظر مباشرة في المصادرات أو القضايا الابتدائيـة، فهـل يمكـن البرهنـة على هـذه النتـائـج باستخدام القضايا الأولية؟ هذا ما يجب علينا أن نوضحه الآن برهانيا.

١ ـ برهن أن ل ⊂ (ق ⊂ ل)

البرهان

نلاحظ أن القضية المطلوب البرهنة عليها هي القضية (٢,٠٢) والتي يطلق عليها نسق برنكيبيا مبدأ التبسيط. وحتى يمكن البرهنة على هذه القضية علينا أن ننظر في صور المصادرات لنعثر على مصادرة تشبهها، فنجد على الفور أن المصادرة (١,٣) وهي مبدأ الإضافة تشبهها. وهذه المصادرة تقرر أن:

ل ⊂ (ق v ل) (١)

كذلك نجد أنه يمكننا أن نقيم علاقة بين التضمن في (ق ⊂ ل) الموجودة

في مبدأ التبسيط، والفصل في رقم (١)، وهذه العلاقة تكون عن طريق السلب. فاذا وضعنا ~ ق بدلا من ق في المعادلة (١) ينتج:

ل ⊃ (~ ق v ل) (٢)

، ∵ تعريف التضمن في القضية (١,٠١) ينص على أن:

ق ⊃ ل = ~ ق v ل (٣)

∴ بتطبيق تعريف التضمن رقم (٣) في المعادلة (٢) باستبدال (~ ق v ل) بالقيمة ق ⊃ ل، ينتج أن:

ل ⊃ (ق ⊃ ل)

هـ. ط. ث

٢ - برهن أن (ق ⊃ ~ ل) ⊃ (ل ⊃ ~ ق)

البرهان

نلاحظ أن القضية التي لدينا والمطلوب البرهنة على صدقها هي الصورة الأولى لمبدأ النقل في القضية (٢,٠٣). وبالنظر في المصادرات التي لدينا نجد أن مبدأ التعديل الذي تعرضه المصادرة (١,٤) يشبه هذه القضية، لأنه ينص على أن:

(ق v ل) ⊃ (ل v ق) (١)

فاذا وضعنا ~ ق بدلا من ق، ~ ل بدلا من ل في المعادلة (١) ينتج:

(~ ق v ~ ل) ⊃ (~ ل v ~ ق) (٢)

، ∵ تعريف التضمن في القضية (١,٠١) ينص على أن:

ق ⊃ ل = ~ ق v ل (٣)

∴ بتطبيق تعريف التضمن (٣) في المعادلة رقم (٢) ينتج أن:

(ق ⊂ ~ ل) ⊂ (ل ⊂ ~ ق)

هـ. ط. ث

٣ ـ برهن أن [ق ⊂ (ل ⊂ م)] ⊂ [ل ⊂ (ق ⊂ م)]

البرهان

نجد أن القضية المطلوب البرهنة عليها هي مبدأ تبادل المواضع الذي تشير اليه القضية (٢,٠٤)، وهذه القضية تشبه مبدأ الترابط (١,٥) الذي ينص على أن:

[ق v (ل v م)] ⊂ [ل v (ق v م)] (١)

في رقم (١) نضع ~ ق بدلا من ق، ~ ل بدلا من ل فينتج:

[~ ق v (~ ل v م)] ⊂ [~ ل v (~ ق v م)] (٢)

، ∵ تعريف التضمن ينص على أن:

ق ⊂ ل = ~ ق v ل (٣)

∴ بالتعويض عن تعريف التضمن في رقم (٢) ينتج:

[ق ⊂ (ل ⊂ م)] ⊂ [ل ⊂ (ق ⊂ م)]

هـ. ط. ث

والخطوة التطبيقية الأخيرة من خطوات البرهنة يمكن تحليلها كما يلي:

∵ المعادلة رقم (٢) تنص على أن:

[~ ق v (~ ل v م)] ⊂ [~ ل v (~ ق v م)]

فانه يمكن النظر اليها كما يلي:

القوس الأول [~ ك v (~ ل v م)] نعتبره على الصورة (~ ك v ل) حيث ل هنا تقوم مقام قوس كامل هو (~ ك v م)، وبالتالي فان الصيغة تصبح (~ ك v ل) وهي مساوية للصيغة (ك ⊂ ل)

، ∵ ل تقوم مقام القوس (~ ل v م) وهذه الصيغة تساوي (ل ⊂ م).

∴ يمكننا أن نضع هذه الصيغة مكان ل فتصبح الصيغة ككل:

[ك ⊂ (ل ⊂ م)]

وهكذا بالنسبة للقوس الثاني.

٤ - برهن أن (ل ⊂ م) ⊂ [(ك ⊂ ل) ⊂ (ك ⊂ م)]

البرهان

صورة القضية التي أمامنا ونريد البرهنة عليها هي مبدأ القياس الذي نعرضه القضية (٢,٠٥)، وهذه الصورة تشبه مبدأ الجمع الذي تعرضه المصادرة (١,٦) وينص على أن:

(ل ⊂ م) ⊂ [(ك v ل) ⊂ (ك v م)] (١)

في رقم (١) نضع ~ ك بدلا من ك.

∴ (ل ⊂م) ⊂ [(~ ك v ل) ⊂ (~ ك v م)] (٢)

، ∵ تعريف التضمن ينص على أن:

ك ⊂ ل = ~ ك v ل (٣)

∴ بتطبيق تعريف التضمن في رقم (٢) ينتج أن:

(ل ⊂ م) ⊂ [(ق ⊂ ل) ⊂ (ق ⊂ م)]

هـ . ط . ث

٥ ـ برهن على أن ق ⊂ ق

البرهان

القضية التي لدينا والمطلوب البرهنة على صدقها هي مبدأ الذاتية (٢,٠٨)، ونحن نلاحظ أنه لا توجد مصادرة تشبه هذا المبدأ، ولكن يمكن البرهنة على صدقها باستخدام صورة مبدأ القياس في القضية (٢,٠٥) والتي تنص على أن:

(ل ⊂ م) ⊂ [(ق ⊂ ل) ⊂ (ق ⊂ م)] (١)

في رقم (١) نضع (ق v ق) بدلا من ل، ونضع ق بدلا من م فينتج:

∴ [(ق v ق) ⊂ ق] ⊂ [{ق ⊂ (ق v ق)} ⊂
(ق ⊂ ق) (٢)

، ∵ مبدأ تحصيل الحاصل في القضية الابتدائية (١,٢) ينص على ان:

(ق v ق) ⊂ ق (٣)

، ∵ القضية (٢,٠٧) من قضايا النسق صحيحة وتنص على أن:

ق ⊂ (ق v ق) (٤)

∴ بالتعويض عن مبدأ تحصيل الحاصل رقم (٣) وعن القضية (٢,٠٧) أي رقم (٤) في المعادلة (٢) ينتج أن:

ق ⊂ ق

هـ . ط . ث

٦ - برهن على أن ق v ~ ق

البرهان

القضية المطلوب البرهنة عليها ليست من النتائج المباشرة للقضايا الابتدائية، وإنما هي تمثل صورة قانون الثالث المرفوع الذي نعرفه في المنطق الصوري. وقد وردت هذه القضية في نسق برنكيبيا تحت رقم (٢,١١)، وحتى نبرهن عليها نستخدم مبدأ التعديل (١,٤) الذي ينص على أن:

(ق v ل) ⊂ (ل v ق) (١)

من رقم (١) نضع ~ ق بدلا من ق، ق بدلا من ل فينتج:

(~ ق v ق) ⊂ (ق v ~ ق) (٢)

من (١)، والنظرية (٢,١) التي تقرر أن (~ ق v ل) وبالتطبيق من المعادلة (٢) ينتج:

∴ ق v ~ ق

هـ. ط. ث

٧ - برهن على أن ق ⊂ ~ (~ ق)

البرهان

القضية المطلوب البرهنة عليها هي القضية (٢,١٢) من قضايا نسق برنكيبيا، ويمكن البرهنة عليها ابتداء من القضية (٢,١١) السابقة والتي أشرنا إليها بقانون الثالث المرفوع، حيث:

ق v ~ ق (١)

نضع ~ ق بدلا من ق في رقم (١) فينتج:

~ ق v ~ (~ ق) (٢)

، ∵ تعريف التضمن يعني أن:

ق ⊂ ل = ~ ق v ل

∴ بتطبيق تعريف التضمن في رقم (٢) ينتج أن:

ق ⊂ ~ (~ ق)

هـ . ط . ث

٨ ـ برهن على أن ق v ~ {~ (~ ق)}

البرهان

ينص مبدأ الجمع (١,٦) على أن:

(ل ⊂ م) ⊂ [(ق v ل) ⊂ (ق v م)] (١)

من رقم (١) نضع ~ ق بدلا من ل، ~ [~ (~ ق)] بدلا من م فينتج:

∴ [~ ق ⊂ ~ {~ (~ ق)}] ⊂ [~ (~ ق)]

، ∵ [~ ق ⊂ ~ {~ (~ ق)}] ⊂ [(ق v ~ ق) ⊂

ق v ~ {~ (~ ق)}] (٢)

ومن القضية ١,١٢ التي تنص على أن:

ق ⊂ ~ (~ ق)

نضع ~ ق بدلا من ق

∴ ~ ق ⊃ ~ (~ ق) (٣)

من (٢)، ٣ ينتج:

∴ (ق v ~ ق) ⊃ [ق v ~ {~ (~ ق)}] (٤)

من (٤)، القضية (٢,١١) السابق البرهنة عليها

∴ ق v ~ {~ (~ ق)}

هـ . ط . ث

كذلك يضع نسق برنكيبيا فكرة حاصل الضرب المنطقي Logical Product للقضايا موضع الاعتبار ، ومن أهم الأمثلة التطبيقية حاصل الضرب المنطقي لقضيتين، فإذا وضعنا في الاعتبار القضية ق والقضية ل فإن حاصل الضرب المنطقي لهما تعبر عنه الصيغة « ق و ل صادقتان ». وهنا فإن نسق برنكيبيا يضع التعريف الآتي لحاصل الضرب المنطقي:

٣,٠١ ق . ل = ~ (~ ق v ل) (تع)

حيث (ق . ل) حاصل الضرب المنطقي للقضية ق والقضية ل معاً.

وبناء على فكرة حاصل الضرب المنطقي يرتب نسق برنكيبيا مجموعة من القضايا الأساسية تقوم أساساً على فكرة التضمن وهي:

٣,٢ ق ⊃ [ل ⊃ (ق . ل)]

أي أن « ق تتضمن أن ل تتضمن ق . ل »، فإذا كانت ق صادقة، ل صادقة، كان حاصل الضرب المنطقي لهما صادقا. ويترتب على هذه الفكرة قضيتان:

٣,٢٦ (ق . ل) ⊃ ق

٣,٢٧ (ق . ل) ⊃ ل

أي إذا كان حاصل الضرب المنطقي لقضيتين صادقاً اذن فالقضيتان صادقتان أيضاً.

٣,٣ [(ق . ل)] ⊂ [م ⊂ (ل ⊂ ق] ⊂ (ل ⊂ م)]

أي إذا كان وصل ق و ل يتضمن م، اذن ق تتضمن أن ل تتضمن م..

وهذا المبدأ هو ما يعرف بمبدأ التصدير **Principle of Exportation** الذي وضعه بيانو.

٣,٣١ [ق ⊂ (ل ⊂ م)] ⊂ [(ق . ل) ⊂ م]

وهذه القضية صورة أخرى من السابقة وتعرف بمبدأ الاستيراد **Principle of Importation** الذي وضعه بيانو أيضاً.

٣,٣٥ [(ق . ق) ⊂ ل] ⊂ ل

« اذا كانت ق صادقة، ل تنتج منها، اذن ل صادقة » تعرف هذه القضية بمبدأ التقرير **Prinicple of assertion**.

٣,٤٣ [(ق ⊂ ل) . (ق ⊂ م)] ⊂ [ق ⊂ (ل . م)]

تعرف هذه القضية بمبدأ التركيب **Principle of Composition** وهذا المبدأ يرجع إلى بيانو.

٣,٤٥ (ق ⊂ ل) ⊂ [(ق . م) ⊂ (ل . م)]

هذه القضية هي مبدأ العامل **Principle of Factor** وقد وضعها بيانو.

٣,٤٧ [(ق ⊂ م) . (ل ⊂ ع)] ⊂ [(ق . ل) ⊂ (م . ع)]

« اذا كانت ق تتضمن ل، م تتضمن ع، إذن الوصل بين ق و ل يتضمن الوصل بين م و ع ».

كذلك ينظر نسق برنكيبيا في علاقات التكافؤ بالإشارة إلى التعريف الذي يقدمه النسق وينص على أن:

٤.٠١ ق ≡ ل = (ق ⊂ ل) . (ل ⊂ ق)   تعريف

والقضايا الأساسية التي تستند إلى صورة تعريف التكافؤ هي:

٤,١ ق ⊂ ل ≡ ~ ل ⊂ ~ ق

٤,١١ (ق ≡ ل) ≡ (~ ق ≡ ~ ل)

وهما معا صورتان لمبدأ النقل

٤,١٣ ق ≡ ~ (~ ق)

٤,٢ ق ≡ ق

٤,٢١ (ق ≡ ل) ≡ (ل ≡ ق)

٤,٢٢ (ق ≡ ل) . (ل ≡ م) ⊂ (ق ≡ م)

٤,٢٤ ق ≡ ق . ق

٤,٢٥ ق ≡ ق v ق

٤,٣ ق . ل ≡ ل . ق

٤,٣١ ق v ل ≡ ل v ق

٤,٣٢ (ق . ل) . م ≡ ق . (ل . م)

٤,٣٣ (ق v ل) v م ≡ ق v (ل v م)

٤,٤ ق . (ل v م) ≡ (ق . ل) v (ق . م)

٤,٤١ ق v (ل . م) ≡ (ق v ل) . (ق v م)

٤,٧١ ق ⊂ ل ≡ [ق ≡ (ق . ل)]

٤,٧٣ ل ⊂ [ق ≡ ق . ل]

الفصل السادس

نظرية حساب المحمول

أحدث كتاب « مبادىء الرياضيات » تطوراً هائلا في الأبحاث المنطقية والرياضية على السواء ، ذلك أن هذا المؤلَّف كان بمثابة حجر الزاوية في تحديد المصطلحات والمفاهيم المنطقية والرياضية التي درج المناطقة وأنصار المنطق الرياضي على تناولها في أبحاثهم دون تدقيق ، ومن ثم فقد لعب كتاب المبادىء دوراً هاماً في تطور المنطق الرياضي [١] ؛ وبناء على هذا التحديد استطاع رسِّل وهوايتهد أن يقدما لنا الرياضيات كفرع من المنطق [٢] .

والواقع أن التقييمات المختلفة على المستوى الرياضي والمنطقي ينعقد إجماعها على أهمية « المبادىء » وتكاد تتفق الآراء على أن هذا المؤلف يُعد بحق فاتحة عهد جديد في الأبحاث المنطقية والرياضة؛ لِمَا أحدثه من ثورة علمية ضخمة تماثل الثورة التي أحدثها « نقد العقل الخالص » لكانط في مجال الإستمولوجيا .

وقد تبيَّن لنا من الاستعراض السابق لنظرية حساب القضايا دقة الطريقة المنطقية الرياضية في تناول القضية ككل . وأما نظرية حساب المحمول

---

(١) Ayer, A. J., «An Apprisal of Bertrand Russell's Philosophy», P. 171, ed. in «Schoenman volum», 1967.

(٢) Bloch, W., «Russell,s Concept of Philosophy», Pp - 153 - 154, ed - in «Schemman volum».

Predicate Calculus Theory فهي من النظريات الحديثة التي بدأت مع « المبادىء »؛ فمنذ الوقت الذي تبيّن فيه رسِّل أن القضية العامة هي في جوهرها قضية شرطية متصلة، اتجه إلى صياغة أفكاره المنطقية صياغة جديدة.

والاختلاف الأساسي بين نظرية حساب القضايا ونظرية حساب المحمول يتمثل في أن نظرية حساب القضايا تتناول القضية كلها كوحدة واحدة، حيث نضع لها رمزاً واحداً، ثم نقوم بإجراء حساب قيم الصدق والكذب في ضوء العلاقات المنطقية بين القضايا. أما حساب المحمول فيتناول القضية تفصيلا، ويضع في الاعتبار حدودها كل على حدة، فيرمز للموضوع وللمحمول أيضاً، ويضع رمزاً للسور الكلي Universal Quantifier، وآخر للسور الجزئي Existential Quantifier، بالإضافة إلى الثوابت المنطقية التي يتفق فيها مع نظرية حساب القضايا. وهذا ما يجعلنا نقول: إن حساب المحمول ينفذ إلى البناء الداخلي للقضية في كل تفصيلاتها، ويعبر عن هذا البناء بلغة رمزية متكاملة تستفيد بالتعبير الرمزي المألوف من نظرية حساب القضايا.

ومن الناحية التاريخية عرض رسِّل بعض أفكاره الخاصة بنظرية حساب المحمول في المقالة التي نشرها عام ١٩٠٨ تحت عنوان « المنطق الرياضي مستنداً إلى نظرية الأنماط »؛ إلا أنه طور النظرية تطويراً دقيقاً في « مبادىء الرياضيات » في القسم الثاني من الجزء الأول تحت اسم « نظرية المتغيرات الظاهرية » Theory of Appearent variables. وهاك هي أفكار رسِّل.

توجد لدينا في نظرية حساب المحمول خمسة أنواع من الرموز المستخدمة وهي:

١ - رموز للمتغيرات الفردية individual variables مثل Z, Y, X
٢ - رموز للمتغيرات الحملية Predicative variables مثل H, G, F

٣ - رمز للسور الكلي Universal Quantifier بالرمز (X) الذي يشير إلى (كل).

٤ - رمز للسور الجزئي Existential Quantifier بالرمز (∃ X) الذي يشير إلى (بعض).

٥ - رمز للثوابت المنطقية بذات الرموز المستخدمة في حساب القضايا مثل (⊃) ، (·) ، (~) ، (≡) ، (V)

والرمز الذي نرمز به للسور الجزئي للقضية، إنما هو في الواقع يرمز إلى الفرد، أو إلى الشيء الجزئي الذي ننسب إليه خاصة ما، على حين أن الرمز الذي نرمز به للسور الكلي، إنما يرمز مباشرة إلى الأشياء المقصودة في القضية. ويلاحظ أنه حينما نقوم بكتابة القضية في صيغة رمزية، فإننا نقدم المحمول في الصياغة ونأتي بالموضوع بعده، فإذا أردنا أن نعبر عن القضية «سقراط حكيم» في صيغة رمزية بلغة حساب المحمول، قلنا (fx) حيث f تشير إلى المحمول، x تشير إلى الموضوع.

وعلى هذا الأساس فإنه يمكن لنا أن نبحث صور القضايا الأربعة التقليدية؛ الكلية الموجبة، الكلية السالبة، الجزئية الموجبة، والجزئية السالبة، في ضوء الأفكار التي عرضنا لها.

أولا: القضية الكلية الموجبة:

انتهى أرسطو، وهو بصدد تصنيفه النهائي للقضايا الحملية، إلى اعتبار أن الصور الأربعة للقضايا الحملية تعتبر بمثابة أبسط صور القضايا، والتي لا يمكن أن تنحل إلى ما هو أبسط منها، على حين أنه اتضح، فيما بعد، لأصحاب المنطق الرمزي، أن تلك الصور ليست في حقيقتها صوراً بسيطة، لأنه قد تبين أن القضية العامة أو الكلية إنما هي في حقيقة أمرها قضية شرطية متصلة

تعبر عن علاقة بين دالتي قضيتين، وتصبح كل من الدالتين قضية حملية حين تتعين قيمة المتغير[1]. ومن ثم لم تصبح القضية العامة حملية بالمعنى الدقيق، وإنما هي شرطية متصلة، على حين أن الحملية هي الشخصية Singular. فموضوع القضية العامة إذن ليس اسم علم، على حين أن موضوع القضية الشخصية اسم علم، حيث نقوم في القضية الشخصية بإسناد محمول إلى اسم العلم، أو شيء جزئي له وجود في الواقع، وهذا ما جعل رسل يقرر أن « القضايا ذات الصورة (كل ا هي ب) ليست حملية بالمعنى الدقيق، لكنها تعبر عن علاقة بين محمولات »[2].

فإذا قلنا « كل إنسان مفكر » فإن كلمة (إنسان) في هذه القضية هي محمول أيضاً شأنها شأن (مفكر) تماماً، لأنه يمكن أن نترجم هذه القضية على النحو التالي « إذا كان x إنسان، فإن x مفكر ». نفسر هذا القول بأنه إذا ما حملنا صفة الإنسانية على (x) وليكن محمداً، فإنه لا بد وأن نحمل علي أيضاً صفة كونه مفكراً.

وعلى هذا الأساس فإن القضية « كل إنسان مفكر » والتي اعتبرها التقليديون قضية حملية، إنما هي في جوهرها قضية شرطية متصلة؛ يمكن التعبير عنها في صورة التضمن، ومن ثم فإنه يمكن تفسير القضية السابقة من وجهة نظر حساب المحمول على النحو التالي: .

$$(x) [f x \supset g x]$$

أي أنه في كل قيم (x) إذا كانت (x) تتصف بالخاصية (f) فإن ذلك يتضمن أن (x) لا بد وأن تتصف بالخاصية (g).

---

(١) Russell. B., My Philosophical Development. P. 66.

(٢) Russel, B., On the Relations of Universals to Particulars, p. 123.

في الصيغة الرمزية السابقة ترمز (x) إلى سور القضية (كل)، وفي (f x) فـإن (x) ترمز إلى اسم العلم، وترمز (f) إلى المحمول إنسان، وترمز (g) إلى المحمول مفكر.

ثانياً: القضية الكلية السالبة:

إن ما ينطبق على القضية الكلية الموجبة، ينطبق بالضرورة على الكلية السالبة، إلا أن صياغة هذه القضية تختلف عن الكلية الموجبة في ناحية السلب فقط، فإذا قلنا « لا إنسان مفكر » فإن هذه القضية يمكن وضعها في الصيغة الرمزية التالية:

$$(x) [f x \supset \sim g x]$$

وتفسير هذه الصيغة أنه « في كل قيم (x) إذا كانت (x) تتصف بالخاصية (f) فإن ذلك يتضمن أن (x) لا تتصف بالخاصية (g) ».

ثالثاً: القضية الجزئية الموجبة:

القضية الجزئية، كما اعتبرها المنطق الرمزي، إنما هي قضية مركبة من قضيتين حمليتين، مرتبطتين معاً بواو العطف، أي ثابت الوصل. فالقضية « بعض الطلاب أذكياء » يمكن أن نضعها في الصيغة الرمزية الآتية:

$$(\exists x) (F x . g x)$$

وتفسر هذه الصيغة كما يلي « يوجد فرد واحد على الأقل (x) مما يكون متصفاً بالخاصية (f) والخاصية (g) معاً ».

رابعاً: القضية الجزئية السالبة:

تختلف صورة القضية الجزئية السالبة عن الجزئية الموجبة من ناحية السلب، ذلك أن هذه القضية في حد ذاتها تخضع لحكم السلب. فالقضية « بعض

العرب ليسوا أحراراً » يمكن أن نضعها في الصياغة الرمزية الآتية :

$$(\exists x) [fx . \sim g x]$$

وهذه الصيغة نفسرها كما يلي : « يوجد فرد واحد على الأقل (x) يتصف بالخاصية (f) ولا يكون متصفاً بالخاصية . (g) .

والصورة الرمزية السابقة تساوى الصوري الآتية : ـ

$$\sim (x) [F x \supset g x]$$

لأنه إذا قلنا إن (بعض العرب ليسوا أحراراً) فإن هذه الصيغة تساوى قولنا (من الكذب أن نقول عن كل عربي إنه حر) .

يتضح لنا مما سبق أن حساب المحمول يعتمد أساساً على فكرتي (صادق دائماً) always true (وصادق أحياناً) Sometimes true ، كما وأن طريقة البرهان المتبعة في نظرية حساب المحمول هي ذاتها المتبعة في نظرية حساب القضايا .

إننا إذا نظرنا إلى نظرية القياس الأرسطية ، وجدنا أن القياس بصفة عامة استدلال موصل لليقين ، ومن ثم اعتبر القياس عملية عقلية خالصة تصبح فيه الصحة الصورية مطلباً أساسياً .

والقياس ـ كما نعلم ـ يستند إلى قوانين الفكر الأساسية ، التي تفترض مقدماً ثبات الموجودات وخضوعها لنظام عقلي يتجاوب مع النظام العقلي الذي يفترضه المنطق .

ورغم أن أرسطو كان أول من وضع نظرية القياس في قالبها وصورتها النهائية ؛ إلا أنه بطبيعة الحال لم يكن أول من استدل قياسياً . فالناس يستخدمون الأسلوب القياسي في حياتهم العملية دون إدراك منهم لحقيقته

تماماً، لكن عبقرية أرسطو في هذا الجانب من جوانب فكرة ترجع إلى أنه قد استخلص القوانين والقواعد والشروط التركيبية اللازمة لصحة القياس؛ وقد تكون الإرهاصات الأولى للمنطق الصوري، بصفة عامة، قد صدرت عن مدارس الجدل السفسطائي ومن ثنايا المحاورات الأفلاطونية.

وإذا حاولنا تتبع نظرية القياس الأرسطية في الفكر الأرسطي ذاته، وجدنا أن أرسطو قد أودع نظريته في القياس، الفصول الأربعة الأولى من التحليلات الأولى، وليس هناك شك في أن نظرية القياس الأرسطية قد ظلت موضع الاعتبار والدراسة والبحث من جانب المفكرين على اختلاف نزعاتهم ومدارسهم ومذاهبهم. ولم يكتب لمحاولات الخروج على قالب الفكر الأرسطي النجاح إلا مع بداية العقود الأولى من القرن العشرين، حيث صدرت مباحث الرمزية Symbolism تحت تأثير الدواعي الرياضية، ومحاولة العثور على الأسس المنطقية للرياضيات.

والقياس نوع من الاستدلال غير المباشر، وهو بحسب أرسطو « قول متى وضعت فيه أشياء معينة نتج عنها بالضرورة شيء آخر »(١).

إلا أن تعريف القياس الأرسطي، على هذا النحو، قد أثار بعض الجدل في دوائر الفكر المنطقي، لأنه قد ينطبق على غيره من صور الاستدلال غير القياسي(٢). والحقيقة التي تفصح عن ذاتها، أن أرسطو قد وضع تعريف القياس أولا، ثم أخذ بعد ذلك يشرع في « تحديد شروطه، وجوانب صحته، وفي هذا ما يشجب التعريف ذاته؛ ذلك لأن أرسطو، ومن قبله سقراط وأفلاطون، كانوا يطالبون بالتعريف الجامع المانع. وتعريف أرسطو

---

(١) Priori Analytics, 24 b 20.

(٢) Bradley, F., Priciples of Logic, Book 11, ch. 4, P. 106.

بصورته الأولية، وإن اعتبر جامعاً، إلا إنه لا يعتبر مانعاً لغير صور الاستدلال القياسي من الدخول تحت القياس.

والقياس إما أن يتألف من نوع واحد من القضايا، وهذا القسم يشتمل على القياس الحملي والشرطي بنوعيه المتصل والمنفصل، وإما أن يتألف من أكثر من نوع واحد من القضايا، وهذا القسم يشمل القياس الاستثنائي بأنواعه المختلفة.

والقياس الحملي يتألف من ثلاثة قضايا حملية تشتمل على ثلاثة حدود، أو من مقدمتين ونتيجة. والحدود الثلاثة هي الأكبر **Major** والأوسط **Middle** والأصغر **Minor**، ولا يظهر الحد الأوسط في النتيجة.

ومن اعتبار وضع الحد الأوسط، وضع أرسطو ثلاثة أشكال قياسية، أضاف إليها المناطقة فيما تلاه من العصور شكلا رابعاً.(١)

والشكل الأول من أشكال القياس، هو الشكل الوحيد الذي نجد فيه الموضوع الذي تحتويه النتيجة، موضوعاً في المقدمة الصغرى، ويكون محمولها، محمولا في المقدمة الكبرى. لقد عول أرسطو تماماً على هذا الشكل، من حيث أنه ينتج القضايا بجميع أنواعها، كما وأنه ينتج لنا الكلية الموجبة، التي تعتمد عليها العلوم الاستنباطية فيما يرى كينز(٢). ولهذا السبب اعتبره أرسطو أكمل الأشكال، وإليه ترد كل من ضروب الشكلين الثاني والثالث.

أما الشكل الثاني، فإنه ينتج لنا القضايا السالبة فقط، ومن ثم يكثر استخدامه في الجدل، وفي هذا الشكل نجد محمول النتيجة هو في الأصل موضوع المقدمة الكبرى.

---

(١) راجع ما ذكرناه عن مشكلة الشكل الرابع من أشكال القياس في كتابنا المنطق ومناهج البحث، ص ٨٦ ـ ص ٨٩.

(٢) Keynes., **Formal logic,** P. 515.

أما الشكل الثالث فنجد فيه موضوع النتيجة هو في الأصل محمول المقدمة الصغرى، وهذا الشكل لا ينتج لنا إلا القضايا الجزئية، تلك التي تستخدم لأغراض إبطال البرهان(١).

والشكل الرابع من أشكال القياس ـ والذي وضع بعد أرسطو ـ ينتج لنا جميع القضايا فيما عدا الكلية الموجبة التي يختص بإنتاجها الشكل الأول، وقد رفض بعض المناطقة اعتبار هذا الشكل(٢).

والسؤال الآن: هل يمكن لنا معرفة إنتاج الضروب من عدمه، في الأشكال القياسية الأربعة، في ضوء اعتبار القضية الكلية، شرطية متصلة، كما اتضح لأصحاب المنطق الرمزي؟.

يمكن لنا أن نتقدم خطوة إلى الأمام لنفحص الضروب في الأشكال القياسية الأربعة لتتضح أمامنا معالم الطريق نحو معرفة المنتج، والفاسد منها من الضروب.

أولا: الشكل الأول:

لهذا الشكل من أشكال القياس موضعه الهام لدى أرسطو في نظرية القياس بوجه عام، ذلك لأنه الشكل الوحيد الذي ينتج لنا القضية الكلية الموجبة، كما ترد إليه الأشكال الأخرى، والصورة الرمزية العامة لهذا الشكل تأخذ الصيغة التالية:

أ هي ب
جـ هي أ   /   وضع الحد الأوسط
∴ جـ هي ب

---

(١) Ib.d, P. 310 f.

(٢) Ibid, P. 316.

والضروب المنتجة في الشكل الأول من أشكال القياس أربعة وهي:

Barbara - Celarent - Darii - Ferio

١ - الضرب الأول Barbara

يمكن لنا توضيح صورة هذا الضرب القياسي بالمثال التالي

كل أ هي ب
كل حـ هي أ

كل حـ هي ب

هذا الضرب يمكن صياغته من وجهة نظر نظرية حساب المحمول على النحو التالي:

$$(x) [\ f x \supset g x\ ]$$

$$(x) [\ h x \supset f x\ [$$

$$\supset$$

$$(x) [\ h x \supset g x\ ]$$

ويمكن لنا وضع هذا القياس في معادلة واحدة على النحو التالي:

$$[\ (x)\ (fx \supset gx)\ .\ (x)\ (hx \supset fx\ ]\ \supset (x)\ (hx \supset gx)$$

يمكننا تفسير الصيغة السابقة على النحو التالي:

« في كل قيم x إذا كانت x تتصف بالخاصية f فإن هذا يتضمن أيضاً أن x تتصف بالخاصية g، وكذلك فإنه في كل قيم x إذا كانت x تتصف بالخاصية h فإن هذا يتضمن أيضاً أن x تتصف بالخاصية f وهذا يتضمن أنه

في كل قيم x إذا كانت x تتصف بالخاصية h فإن ذلك يتضمن أنها تتصف بالخاصية g ».

وفي ضوء هذا التفسير الرمزي يمكن لنا صياغة المثال الذي أشرنا إليه كما يلي:

« إن كل شيء نقول عنه أنه p فإن هذا القول، يتضمن أن هذا الشيء ب، كما وأن كل شيء نقول عنه أنه هـ فإن هذا يتضمن كونه ا . وهذا يتضمن بالضرورة أن كل شيء متصف بصفة كونه هـ ، فإن هذا يتضمن أيضاً أنه ب ».

نجد من هذه الصياغة، أن التفسير مطول بدرجة لا تمكننا من إعادة تكرارها في صياغة كل ضرب من ضروب القياس. ومع هذا فإنه يمكننا معرفة ما إذا كان هذا الضرب القياسي منتجاً أم فاسداً إذا ما وضعنا الصيغة الرمزية السابقة في قائمة صدق، فإذا ظهرت قيمة كذب واحدة تحت ثابت التضمن الرئيسي (⊃) فإن الضرب القياسي يكون فاسداً.

والصيغة الرمزية للضرب Barbara يمكن وضعها في صياغة أخرى من وجهة نظر نظرية حساب القضايا فتأخذ الصورة التالية:

$$[\ (p \supset q)\ .\ (R \supset p)\ ] \supset (R \supset q)$$

يلاحظ هنا أن هذه الصيغة تحتوي على ثلاثة متغيرات

$$p,\ q,\ R$$

ومن ثم فإن لها ثماني قيم للصدق أو الكذب.

قائمة الصدق

[(p	⊃	q)	.	(R	⊃	p)]	⊃	(R	⊃	q)
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	T	T	F	T	T	T	F	T	T
T	F	F	F	T	T	T	T	T	F	F
T	F	F	F	F	T	T	T	F	T	F
F	T	T	F	T	F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	F	T	F	T	F	T	T
F	T	F	F	T	F	F	T	T	F	F
F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F

يتضح لنا من قائمة الصدق السابقة أن كل القيم تحت ثابت التضمن الرئيسي في العمود رقم (٨) كلها قيم صدق، ومن ثم فإن **هذا الضرب صحيح أي أنه منتج.**

٢ - الضرب الثاني **Celarent**

مثال هذا الضرب

لا ا هى ب	E
كل حـ هى ا	A
لا حـ هى ب	E

هذا الضرب يضع له حساب المحمول الصياغة التالية:

$$[\ (x)\ (fx \supset \sim gx)\ .\ (x)\ (hx \supset fx)\ ] \supset (x)\ (hx \supset \sim gx)$$

وهذه الصياغة من وجهة نظر نظرية حساب القضايا تصبح

$$[\ (p \supset \sim q)\ .(R \supset p)\ ] \supset (R \supset \sim q)$$

يمكن لنا وضع قائمة صدق هذه الصيغة على النحو التالي لنعرف إنتاج هذا الضرب من عدمه.

قائمة الصدق

[(p	⊃	~ q)	.	(R	⊃	p)]	⊃	(R	⊃	~q)]
T	F	F	F	T	T	T	T	T	F	F
T	F	F	F	F	T	T	T	F	T	F
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	T	T	F	T	T	T	F	T	T
F	T	F	F	T	F	F	T	T	F	F
F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F
F	T	T	F	T	F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	F	T	F	T	F	T	T

يتضح لنا من هذه القائمة أن هذا الضرب صحيح ومنتج

٣ - الضرب الثالث Darii

مثال هذا الضرب

كل	ا	هى	ب	A
بعض	ح	هى	ا	I
بعض	ح	هى	ب	I

نعبر عن هذا الضرب رمزياً وفقاً لنظرية حساب المحمول كما يلي:

$$[(x)\ (f\,x \supset g\,x)\ .\ (\exists\,x)\ (h\,x\ .\ f\,x)\ ] \supset (\exists\,x)\ (h\,x\ .\ g\,x)$$

تختلف هذه الصيغة عن صيغة الضروب الكلية في أن سور القضية جزئي ويرمز له بالرمز .(∃ x) أي « في بعض قيم x ».

نضع هذه الصيغة في صورة حساب القضايا على النحو التالي

$$[(p \supset q)\ .\ (R\ .\ p)\ ] \supset (R\ .\ q)$$

قائمة الصدق

[(p	⊃	q)	.	(R	.	p)]	⊃	(R	.	q)
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	T	F	F	F	T	T	F	F	T
T	F	F	F	T	T	T	T	T	F	F
T	F	F	F	F	F	T	T	F	F	F
F	T	T	F	T	F	F	T	T	T	T
F	T	T	F	F	F	F	T	F	F	T
F	T	F	F	T	F	F	T	T	F	F
F	T	F	F	F	F	F	T	F	F	F

نجد هنا أن كل القيم تحت ثابت التضمن الرئيسي هي قيم صدق ومن ثم فإن الضرب الثالث من الشكل الأول منتج.

٤ ـ الضرب الرابع Ferio

لا ا هى ب	E
بعض هـ هى ا	I
ليس بعض هـ هى ب	0

يمكن لنا صياغة هذا الضرب على النحو التالي:

[(x) (f x ⊃ ~ g x) . (∃ x) (h x . f x)] ⊃ (∃ x) (h x . ~ g x)

وتصبح هذه الصيغة وفقاً لنظرية حساب القضايا كما يلي:

[(p ⊃ ~ q) . (R . p)] ⊃ (R . ~ q)

قائمة الصدق

[(p	⊃	~ q)	.	(R	.	p)	⊃	(R	.	~ q)
T	F	F	F	T	T	T	T	T	F	F
T	F	F	F	F	F	T	T	F	F	F
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	T	F	F	F	T	T	F	F	T
F	T	F	F	T	F	F	T	T	F	F
F	T	F	F	F	F	F	T	F	F	F
F	T	T	F	T	F	F	T	T	T	T
F	T	T	F	F	F	F	T	F	F	T

يتضح لنا من قائمة الصدق السابقة أن الضرب الرابع Ferio من الشكل الأول صحيح ومنتج ذلك أن جميع القيم تحت ثابت التضمن الرئيسي إنما هي قيم صدق.

ومن ثم فإنه قد اتضح لنا أن الضروب الأربعة التي اعتبرها أرسطو ضروباً منتجة في الشكل الأول، إنما هي كذلك من وجهة نظر حساب المحمول بعد أن أجرينا عليها عمليات التحليل في قوائم الصدق وفقاً للشروط التي تحددها الثوابت المنطقية.

ثانياً: الشكل الثاني Second figure

الصورة الرمزية العامة لهذا الشكل

ا هى ب		وضع الحد الأوسط
ح هى ب		
∴ ح هى ا		

ذهب أرسطو إلى أن الضروب المنتجة في هذا الشكل إنما هي أربعة ضروب وهي على الترتيب.

Cesare - Camestres - Festino - Baroco

ويمكن لنا أن نتبين إنتاج هذه الضروب من فسادها إذا ما أجرينا عليها عملية التحليل في قوائم الصدق.

١ - الضرب الأول Cesare

لا ا هى ب	E
كل ح هى ب	A
لا ح هى ا	E

صيغة هذا الضرب تأخذ الصورة التالية من وجهة نظر حساب المحمول:

$$[(x) (f x \supset \sim g x) . (x) (h x \supset g x)] \supset (x) (h x \supset \sim f x)$$

ومن وجهة نظر حساب القضايا تصبح.

$$[(p \supset \sim q) . (R \supset q)] \supset (R \supset \sim p)$$

وقائمة صدق هذا الضرب تأخذ القيم التالية:

[(p	⊃	~ q)	.	(R	⊃	q)]	⊃	(R	⊃	~ p)
T	F	F	F	T	T	T	T	T	F	F
T	F	F	F	F	T	T	T	F	T	F
T	T	T	F	T	F	F	T	T	F	F
T	T	T	T	F	T	F	T	F	T	F
F	T	F	T	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	T	T	T	F	T	T
F	T	T	F	T	F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	F	T	F	T	F	T	T

يتضح لنا من هذه القائمة أن جميع القيم تحت ثابت التضمن الرئيسي هي قيم صدق.

الضرب الثاني Camestres

ومثال هذا الضرب

كل ا هي ب	A
لا حـ هي ب	E
لا حـ هي ا	E

صيغة هذا الضرب

$$[\ (x)\ (f\,x \supset g\,x)\ .\ (x)\ (h\,x \supset \sim g\,x)\ ] \supset (x)\ (h\,x \supset \sim f\,x)$$

وفي صيغة حساب القضايا تصبح

$$[\ (p \supset q)\ .\ (R \supset \sim q)\ ] \supset (R \supset \sim p)$$

وقائمة صدق هذه الصيغة تصبح على النحو التالي:

[(p	⊃	q)	.	(R	⊃	~q)]	⊃	(R	⊃	~ p)
T	T	T	F	T	F	F	T	T	F	F
T	T	T	T	F	T	F	T	F	T	F
T	F	F	F	T	T	T	T	T	F	F
T	F	F	F	F	T	T	T	F	T	F
F	T	T	F	T	F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	F	T	F	T	F	T	T
F	T	F	T	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	T	T	T	F	T	T

نوضح لنا قائمة الصدق السابقة أن كل القيم تحت ثابت التضمن الرئيسي إنما هي قيم صدق ومن ثم فإن الضرب Camestres صحيح ومنتج من وجهة نظرية حساب المحمول.

٣ - الضرب الثالث Festino

لا ا هي ب	E
بعض ﻫ هي ب	I
ليس بعض ﻫ هي ا	O

هذا الضرب القياسي يمكن وضعه في الصيغة التالية:

$$[\ (x)\ (f\,x \supset \sim g\,x)\ .\ (\exists\, x)\ (h\,x\ .\ g\,x)\ ] \supset (\exists\, x)\ (h\,x\ .\ \sim f\,x)$$

وتأخذ هذه الصياغة الصورة التالية وفقاً لنظرية حساب القضايا

$$[\ (p \supset \sim q)\ .\ (R\ .\ q)\ ]\ \supset (R\ .\sim p)$$

وقائمة صدق هذا الضرب توضع على النحو التالي:

[(p	⊃	~ q)	.	(R	.	q)]	⊃	(R	.	~ p)
T	F	F	F	T	T	T	T	T	F	F
T	F	F	F	F	F	T	T	F	F	F
T	T	T	F	T	F	F	T	T	F	F
T	T	T	F	F	F	F	T	F	F	F
F	T	F	T	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	F	F	T	T	F	F	T
F	T	T	F	T	F	F	T	T	T	T
F	T	T	F	F	F	F	T	F	F	T

من قائمة الصدق السابقة نجد أن جميع القيم تحت ثابت التضمن الرئيسي في العمود رقم (٨) إنما هي قيم صدق، ومن ثم فإن الضرب Festino صحيح ومنتج.

٤ - الضرب الرابع من الشكل الثاني Baroco

صورة هذا الضرب القياسي تتضح لنا من المثال التالي

كل ا هي ب	A
ليس بعض هـ هي ب	O
ليس بعض هـ هي ا	O

وصيغته الرمزية هي:

$$[\ (x)\ (f\,x \supset g\,x)\ .\ (\exists\,x)\ (h\,x\ .\ \sim g\,x)\ ] \supset (\exists\,x)\ (h\,x\ .\ \sim f\,x)$$

ومن وجهة نظر حساب القضايا تكون

$$[\ (p \supset q)\ .\ (R\ .\ \sim q)\ ] \supset (R\ .\ \sim p)$$

وقائمة صدق هذا الضرب توضح لنا إنتاجه من فساده.

[(p	⊃	q)	.	(R	.	~q)]	⊃	(R	.	~ p)
T	T	T	F	T	F	F	T	T	F	F
T	T	T	F	F	F	F	T	F	F	F
T	F	F	F	T	T	T	T	T	F	F
T	F	F	F	F	F	T	T	F	F	F
F	T	T	F	T	F	F	T	T	T	T
F	T	T	F	F	F	F	T	F	F	T
F	T	F	T	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	F	F	T	T	F	F	T

ثالثاً الشكل الثالث Third Figure

لا ينتج لنا هذا الشكل سوى الجزئيات. والصورة العامة لهذا الشكل هي:

ب هي حـ
ب هي ل
∴ حـ هي م

والضروب التي اعتبرها أرسطو منتجه في هذا الشكل ستة ضروب هى

Darapti - Disamis - Datisi - Felapton - Bocardo - Ferison.

ويمكن معرفة إنتاج هذه الضروب من فسادها عن طريق وضعها في الصيغ الرمزية وإخضاعها للتحليل عن طريق قوائم الصدق.

١ ـ الضرب الأول Darapti

ومثال هذا الضرب

كل الجنود شجعان — كل ﺃ هى ب
كل الجنود منتصرون — كل ﺃ هى حـ
بعض المنتصرون شجعان — ∴ بعض حـ هى ب

صورة هذا الضرب وفقاً لنظرية حساب المحمول هي

$$[(x)(fx \supset gx).(x)(fx \supset hx)] \supset (\exists x)(hx . gx)$$

هذه الصورة تصبح وفقاً لنظرية حساب القضايا على النحـو التالي:

$$[(p \supset q).(p \supset R)] \supset (R . q)$$

الصيغة التحليلية لهذا الضرب توضحها القائمة التالية:

[(p	⊃	q)	.	(p	⊃	R)]	⊃	(R	.	q)
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	T	F	T	F	F	T	F	F	T
T	F	F	F	T	T	T	T	T	F	F
T	F	F	F	T	F	F	T	F	F	F
F	T	T	T	F	T	T	T	T	T	T
F	T	T	T	F	T	F	F	F	F	T
F	T	F	T	F	T	T	F	T	F	F
F	T	F	T	F	T	F	F	F	F	F

ومن قائمة الصدق السابقة يتضح لنا أن هناك ثلاث قيم كذب تحت ثابت التضمن الرئيسي ومن ثم فإن هذا الضرب فاسد وغير منتج، وهذا الضرب هو الذي قاد المناطقة الرياضيين إلى القيام بمحاولة إعادة صياغة نظرية القياس الأرسطية.

٢ - الضرب الثاني **Disamis**

ومثال هذا الضرب

بعض ا هي ب	I
كل حـ هي ب	A
بعض هـ هي ب	I

يمكن صياغة هذا الضرب وفقاً لنظرية حساب المحمول على النحو التالي:

$$(\exists x)[\ fx\ .\ gx\ ]$$
$$(x)[\ fx \supset hx)\ ]$$
$$\therefore (\exists x)[\ hx\ .\ gx\ ]$$

$$[\ (\exists x)\ (fx\ .\ gx)\ .\ (x)\ (fx \supset hx)\ ] \supset (\exists x)\ (hx\ .\ gx)$$

ويمكن وضع هذا الضرب القياسي في الصورة التالية من وجهة نظر حساب القضايا

$$[\ (p\ .\ q)\ .\ (p \supset R)\ ] \supset (R\ .\ q)$$

وتوضع الصيغة التحليلية لهذا الضرب في القائمة الآتية

[(p	.	q)	.	(p	⊃	R)]	⊃	(R	.	q)
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	T	F	T	F	F	T	F	F	T
T	F	F	F	T	T	T	T	T	F	F
T	F	F	F	T	F	F	T	F	F	F
F	F	T	F	F	T	T	T	T	T	T
F	F	T	F	F	T	F	T	F	F	T
F	F	F	F	F	T	T	T	T	F	F
F	F	F	F	F	T	F	T	F	F	F

يتضح لنا من الصيغة التحليلة لهذا الضرب أن كل القيم تحت ثابت التضمن الرئيسي هي قيم صدق ومن ثم فإن الضرب صحيح ومنتج.

٣ ـ الضرب الثالث Datisi

صيغة هذا الضرب من وجهة نظر نظرية حساب المحمول هى:

$$[\ (x)\ (f x \supset g x\ .\ (\exists x)\ (f x\ .\ h x).\ ] \supset (\exists x)\ (h x\ .\ g x)$$

وهذه الصيغة وفقاً لنظرية حساب القضايا تصبح

$$[\ (p \supset q)\ .\ (p\ .\ R)\ ] \supset (R\ .\ q)$$

وقائمة الصدق هي التي توضح لنا إنتاج هذا الضرب من عدمه.

[(p	⊃	q)	.	(p	.	R)]	⊃	(R	.	q)
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	T	F	T	F	F	T	F	F	T
T	F	F	F	T	T	T	T	T	F	F
T	F	F	F	T	F	F	T	F	F	F
F	T	T	F	F	F	T	T	T	T	T
F	T	T	F	F	F	F	T	F	F	T
F	T	F	F	F	F	T	T	T	F	F
F	T	F	F	F	F	F	T	F	F	F

يتضح لنا من هذه الصيغة التحليلية أن جميع القيم تحت ثابت التضمن الرئيسي إنما هي قيم صدق ومن ثم فإن الضرب القياسي Datisi من الشكل الثالث منتج وصحيح.

٤ ـ الضرب الرابع Felapton

ومثال هذا الضرب

لا ا هي ب E

كل ا هي هـ A

ليس بعض هـ هي ب O

الصياغة الرمزية لهذا القياس تكون على النحو التالي:

$$[(x)(fx \supset \sim gx) \,.\, (x)(fx \supset hx)] \supset (\exists x)(hx \,.\, \sim gx)$$

وتكون هذه الصيغة وفقاً لنظرية حساب القضايا هي.

$$[(p \supset \sim q) \,.\, (p \supset R)] \supset (R \,.\, \sim q)$$

والصيغة التحليلية لهذا الضرب يمكن وضعها في القائمة التالية لنعرف ما إذا كان الضرب القياس منتجاً أم فاسداً.

[(P	⊃	~ q)	.	(P	⊃	(R	⊃	(R	.	~ q)
T	F	F	F	T	T	T	T	T	F	F
T	F	F	F	T	T	F	T	F	F	F
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	T	F	T	F	F	T	F	F	T
F	T	F	T	F	T	T	F	T	F	F
F	T	F	T	F	T	F	F	F	F	F
	F	T	T	F	T	T	T	T	T	T
	F	F	T	F	T	F	F	F	F	T

يتضح لنا من الصيغة التحليلية للضرب الرابع من الشكل الثالث أن هناك ثلاث قيم كذب تحت ثابت التضمن الرئيسي، ومن ثم فإن هذا الضرب فاسد وغير منتج أي أنه غير صحيح.

٥ - الضرب الخامس Bocardo

ومثال هذا الضرب

ليس بعض ا هي ب	O
كل ا هي د	A
ليس بعض د هي ب	O

يمكن وضع هذا الضرب في الصورة التالية وفقاً لنظرية حساب المحمول.

$$[\ (\ni x)\ (f x\ .\ \sim g x)\ .\ (f x \supset h x)\ ] \supset (\ni x)\ (h x\ .\ \sim g x)$$

وتكون هذه الصيغة وفقاً لنظرية حساب القضايا على النحو التالي.

$$[\ (p\ .\ \sim q)\ .\ (p \supset R)\ ] \supset (R\ .\ \sim q)$$

والصيغة التحليلية لهذا الضرب تتخذ القيم التالية.

[(p	.	~ q)	.	(p	⊃	R)]	⊃	(R	.	~ q)
T	F	F	F	T	T	T	T	T	F	F
T	F	F	F	F	T	F	F	T	F	F
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	T	F	T	F	F	T	F	F	T
F	F	F	F	F	T	T	T	T	F	F
F	F	F	F	F	T	F	T	F	F	F
F	F	T	F	F	T	T	T	T	T	T
F	F	T	F	F	T	F	T	F	F	T

يلاحظ أنه في حالة الضرب Bocardo تكون كل القيم تحت ثابت التضمن الرئيسي هي في حد ذاتها قيم صدق ومن ثم فإن هذا الضرب صحيح ومنتج.

٦ - الضرب السادس Ferison

مثال هذا الضرب

لا ا هي ب	E
بعض ا هي هـ	هـ
ليس بعض هـ هي ب	O

وهذا الضرب وفقاً لنظرية حساب المحمول يأخذ الصورة التالية.

$$[\ (x)\ (f x \supset \sim g x)\ .\ (\exists x)\ (f x\ .\ h x)\ ]\ \supset\ (\exists x)\ (h x\ .\ \sim g x)$$

وصيغته وفقاً لنظرية حساب القضايا تكون صورتها

$$[\ (p \supset \sim q)\ .\ (P\ .\ R)\ ]\ \supset\ (R\ .\ q)$$

والصيغة التحليلية لهذا الضرب يمكن وضعها في القائمة التالية:

[(P	⊃	~ q)	.	(P	.	R)]	⊃	(R	.	~q)
T	F	F	F	T	T	T	T	T	F	F
T	F	F	F	T	F	F	T	F	F	F
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	T	F	T	F	F	T	F	F	T
F	T	F	F	F	F	T	T	T	F	F
F	F	T	F	F	F	F	T	F	F	F
F	T	T	F	F	F	T	T	T	T	T
F	T	T	F	F	F	F	T	F	F	T

يلاحظ من الصيغة التحليلية لهذا الضرب أن جميع القيم تحت ثابت التضمن الرئيسي هي قيم صدق ومن ثم فإن الضرب القياسي السادس من الشكل الثالث منتج.

رابعاً: الشكل الرابع.

في هذا الشكل يكـون الحد الأوسـط محمولاً في الكبرى ومـوضـوعـاً في الصغرى، ويفضل البعض تسمية هذا الشكل «بالشكل الجاليني» Galenian Figure. وعلى حد قول كينز Keynes فإن هذا الشكل لم يظهر في كتابات المنطق قبل بداية القرن الثامن عشر.

وقد ذهب المناطقة إلى أن هناك خمسة ضروب منتجة في هذا الشكل، وهذه الضروب هي:

Bramantip - Camenes - Dimaris - Fesapo - Fresison.

والصورة الرمزية العامة لهذا الشكل هي:

ب هي ا
ا هي حـ
وضع الحد الأوسط

∴ حـ هي ا

ويمكننا القيام بمحاولة صياغة الضروب الخمسة، التي اعتبرت منتجة، في الشكل الرابع؛ من وجهة نظر المناطقة المحدثين وفقاً لنظرية حساب المحمول، حتى نرى ما إذا كانت هذه الضروب منتجة حقاً أم لا.

١ - الضرب الأول Bramantip

مثال هذا الضرب

A	كل ب هي ا
A	كل ا هي هـ
I	بعض هـ هي ب

صياغة هذا الضرب القياسي وفقاً لنظرية حساب المحمول هي:

$$\cdot\ [\ (x)\ (f\,x \supset g\,x)\ .\ (x)\ (g\,x \supset h\,x)\ ]$$

$$\supset (\exists\, x)\ (h\,x\ .\ f\,x)$$

وهذه الصياغة من وجهة نظر حساب القضايا تصبح:

$$(p \supset q)\ .\ (q \supset R) \supset (R\ .\ p)\ ]$$

ويمكن وضع هذه الصيغة في قائمة الصدق التالية:

[(p	⊃	⊃	q)	·	(q	⊃	R)]	⊃	·	p)
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	T	F	T	F	F	T	F	F	T
T	F	F	F	F	T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	F	T	F	T	F	F	T
F	T	T	T	T	T	T	F	T	F	F
F	T	T	F	T	F	F	T	F	F	F
F	T	F	T	F	T	T	F	T	F	F
F	T	F	T	F	T	F	F	F	F	F

يتضح لنا من قائمة صدق هذا الضرب القياسي أن القيم تحت ثابت التضمن الرئيسي في العمود رقم ٨ تحوي ثلاث قيم كذب. ومن ثم فإن هذا الضرب القياسي فاسد وغير منتج.

٢ - الضرب الثاني Camenes

مثال هذا الضرب

كل ب هي ا	A
لا ا هي ﻫ	E
لا واحد من ﻫ هي ب	E

صياغة هذا الضرب وفقاً لنظرية حساب المحمول هي:

$$[\ (x)\ (f\,x \supset g\,x)\ .\ (x)\ (g\,x \supset \sim h\,x)\ ]$$

$$\supset (x)\ (h\,x \supset \sim f\,x)$$

وهذه الصيغة وفقاً لنظرية حساب القضايا هي:

$$[\ (p \supset q)\ .\ (q \supset \sim R)\ ]\ (R \supset \sim p)$$

ويمكن لنا معرفة قيم الصدق والكذب لهذه الصيغة عن طريق الالتجاء لقائمة الصدق حتى يمكننا أن نعرف صحة هذا الضرب القياسي من عدمه.

[(p	⊃	(q	.	(q	⊃	~R)	⊃	(R	⊃	~p)]
T	T	T	F	T	F	F	T	T	F	F
T	T	T	T	T	T	T	T	F	T	F
T	F	F	F	F	T	F	T	T	F	F
T	F	F	F	F	T	T	T	F	T	F
F	T	T	F	T	F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T	T	F	T	T
F	T	F	T	F	T	F	T	T	T	T
F	T	F	T	F	T	T	T	F	T	T

يلاحظ من الصيغة التحليلية لهذا الضرب ـ كما هو موضح ـ من قائمة الصدق أنه ضرب منتج أي صحيح لأن القائمة لا تحتوي على قيم كذب.

٣ ـ الضرب الثالث Dimaris

ومثال هذا الضرب القياسي

بعض ب هي ا   I

كل ا هي هـ   A

∴ بعض هـ هي ا   I

صياغة هذا الضرب القياس وفقاً لنظرية حساب المحمول تكون على النحو التالي:

$$[\ (x)\ (f x\ .\ g x)\ .\ (\exists x)\ (g x \supset h x)\ ] \supset (\exists x)\ (h x\ .\ f x)$$

هذه الصيغة من وجهة نظر حساب القضايا تأخذ الشكل الآتي:

$$[(p . q) . (q \supset R)] \supset (R . p)$$

يمكن لنا أن نستنتج فساد هذا الضرب من صحته، إذا ما قمنا بوضع هذه الصيغة في قائمة صدق ونجري عليها قوانين المنطق الرمزي حتى نعرف قيم الصدق الخاصة بهذا الضرب القياسي.

[(p	.	q)	.	(q	⊃	R)]	⊃	(R	.	p)
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	T	F	T	F	F	T	F	F	T
T	F	F	F	F	T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	F	T	F	T	F	F	T
F	F	T	F	T	T	T	T	T	F	F
F	F	T	F	T	F	F	T	F	F	F
F	F	F	F	F	T	T	T	T	F	F
F	F	F	F	F	T	F	T	F	F	F

يتضح لنا من الصيغة التحليلية لهذا الضرب أن جميع القيم تحت ثابت التضمن الرئيسي هي قيم صدق، ومن ثم فإن هذا الضرب صحيح ومنتج.

٤ ـ الضرب الرابع Fesapo

الصورة التالية توضح لنا صياغة هذا الضرب.

E	لا واحد من أ هي ب
A	كل ب هي ح
O	ليس بعض هـ هي أ

صياغة هذا الضرب من وجهة نظر نظرية حساب المحمول تأخذ الصورة التالية.

$$[\ (x)\ (f\,x \supset \sim g\,x)\ .\ (x)\ (g\,x \supset h\,x) \supset\ ] \supset (\exists x)\ (h\,x\ .\ \sim f\,x)$$

وإذا ما وضعنا هذه الصيغة وفق نظرية حساب القضايا تكون صورتها.

$$[\ (p \supset \sim \supset q)\ .\ (q \supset R)\ ] \supset (R\ .\ \sim p)$$

ويمكننا وضع هذه الصيغة للضرب الرابع من الشكل الرابع في قائمة الصدق التالية حتى نعرف ما إذا كان هذا الضرب القياسي منتج أم لا.

[(p	⊃	~ q)	.	(q	⊃	R]	⊃	(R	.	~ p)
T	F	F	F	T	T	T	T	T	F	F
T	F	F	F	T	F	F	T	F	F	F
T	T	T	T	F	T	T	F	T	F	F
T	T	T	T	F	T	F	F	F	F	F
F	T	F	T	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	T	F	F	T	F	F	T
F	T	T	T	F	T	T	T	T	T	T
F	T	T	T	F	T	F	F	F	F	T

يتضح لنا من هذه القائمة أن هناك قيم كذب تحت ثابت التضمن الرئيسي في العمود رقم (٨) ومن ثم فإن هذا الضرب القياسي فاسد وغير منتج.

٥ ـ الضرب الخامس Fresison

مثال هذا الضرب

كل م ليست ب	E
بعض ب هي حـ	I
ليس بعض حـ هي ا	O

صيغة هذا الضرب من وجهة نظر نظرية حساب المحمول تكون على النحو التالي:

$$[\ (x)\ (f x \supset \sim g x)\ .\ (\exists x)\ (g x\ .\ h x)\ ] \supset (\exists x)\ (h x\ .\ \sim f x)$$

وهذه الصيغة وفقاً لنظرية حساب القضايا تأخذ الصورة التالية:

$$[\ (p \supset \sim q)\ .\ (q\ .\ R)\ ] \supset (R\ .\ \sim p)$$

ويمكن لنا معرفة ما إذا كان هذا الضرب منتجاً أم فاسداً عن طريق الالتجاء لقائمة الصدق.

[(p	⊃	~ q)		(q	.	R)]	⊃	(R	.	~ p)
T	F	F	F	T	T	T	T	T	F	F
T	F	F	F	T	F	F	T	F	F	F
T	T	T	F	F	F	T	T	T	F	F
T	T	T	F	F	F	F	T	F	F	F
F	T	F	T	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	T	F	F	T	F	F	T
F	T	T	F	F	F	T	T	T	T	T
F	T	T	F	F	F	F	T	F	F	T

يتضح لنا من الصيغة التحليلية لهذا الضرب أن كل القيم الموجودة تحت ثابت التضمن الرئيسي هي قيم صدق، ومن ثم يكون الضرب منتجاً أي صحيحاً.

الفصل السابع

نظرية حساب الفصول

دراسة الفصول Classes ، من دراسات المنطـق الريـاضي المعـاصر ذات الأهمية المركزية، رغم أن بعض المناطقة الرياضيين لم يقدموا لنا دراسة نظرية الفصول على أنها من النظريات ذات الفائدة المباشرة؛ زعماً بأن دراسة الفصول، في حد ذاتها، تخدم الفلسفة أكثر من المنطق أو الرياضيات. لكن أصحاب الاتجاه الرياضي يركزون بصفة مباشرة على أهمية هذه النظرية، بل نجد أعمالهم تتناول المواضع الأساسية في النظرية خاصة في الرياضيات العليا.

وقد اتضح للمعاصرين من المناطقة والرياضيين، أن نظرية الفصول تفضي إلى نتائج علمية تطبيقية في أهم جانب من جوانب البحث العلمي، خاصة في علم الفيزياء Physics ، وعلى وجه التحديد نظرية الاحتمالات [1] Theory of Probability.

ويهمنا أن نؤكد ـ قبل أن نتناول بالبحث النظرية التي بين أيدينا ـ أن البحث في مسألة الفصول يرتد بصفة مباشرة إلى عقلية أرسطو، صاحب

---

(١) (a) Iass, H Gottlieb, P. **Probability and Statistics,** ch.1, ch.2, London 1970.

(b) **Eoller. W., An Introduction to Probability Theory and ist Applications,** 3rd ed, London, 1968.

(c) **Kaye, D., Boolean Systems,** London, 1970.

المنطق وواضعه الأول. لأن نظرية الفصول ترتبط ارتباطاً وثيقاً بمبحث التصورات Concepts من ناحية، وبالمفهوم Intentoin والماصدق Extention من الناحية الأخرى، ونظرية الأحكام Judgments من الناحية الثالثة، وما يرتبط بهذه الأبحاث جميعاً من نواحي تطبيقية سواء في الاستدلالات المباشرة Mediate Infererce أم الاستدلالات غير المباشرة Immediate Inference، هذا إلى جانب ارتباطها الوثيق بمبحث الوجود Ontology.

إلا أنه ينبغي أن نوضح، بادىء ذي بدء، أننا لن نتناول في هذا الموضع بحث ما لنظرية الفصول من أهمية بالنسبة لمبحث الوجود، من الناحية الفلسفية، بل سنركز على دراسة الجوانب المنطقية والرياضية للنظرية، ذلك لأن أهمية نظرية الفصول تكمن في ثلاث جوانب هامة هي:

الجانب الأول: منطقي، يتصل أوثق الاتصال بالاتجاهات الأساسية للمنطق الصوري الارسطي.

الجانب الثاني: رياضي، يدعم أبحاث المناطقة والرياضيين معا في الجزء الخاص بالمنطق الرياضي.

الجانب الثالث: تطبيقي، يتصل اتصالا مباشراً بإمكانية استخدام العلاقات الأساسية للفصول في نظرية حساب الاحتمالات. وهو موضوع اهتمام الرياضيين والدارسين للفيزياء الحديثة.

وعلى هذا فإننا سنتناول في دراستنا هذا الجانب المتصل بالمنطق الرياضي فقط لأن الجوانب الأخرى تتصل بموضوعات خارجة عن مجال هذه الدراسة.

الحقيقة التي يكاد يجمع عليها المناطقة الدارسون للمنطق الصوري الأرسطي تتبدى لنا في القول بأن أبحاث أرسطو في المنطق صدرت عن عقلية صورية تجريدية بحتة؛ لكن جوهر الأمر يتمثل في أن أرسطو لم يقدم لنا

مباحث المنطق في ثوبها الصوري فحسب، بل عمد من باب خلفي إلى ربط المنطق بالميتافيزيقا في أقوى صورها من ناحية، كما تفصح عنها التحليلات الأرسطية في « ما بعد الطبيعة » كما وقد ربط دراسته للمنطق بالفيزياء كعلم يدرس الواقع التجريبي من الناحية الأخرى، وربما كشفت لنا أبحاث المعاصرين من كبار الرياضيين والفيزيائيين عن أهمية أرسطو في هذه الناحية.

وتأسيساً على هذا، فانه على الرغم من أننا لا نجد من بين مباحث المنطق الصوري الأرسطي مبحثاً مستقلاً لنظرية الفصول وأهميتها، إلا أننا نجد أرسطو يغلف نظرية المنطق بأسرها من خلال إدراكه التام لحقيقة الدور الذي يؤديه تصور الفصل في المنطق، وهذا ما جعله يميز بدقة بين الحدود Terms والتصورات والمفهوم والما صدق والأحكام والقضايا.

وإذا كان المعاصرون من المناطقة لم يتبينوا أهمية أرسطو في هذه النقطة، فإن هذا يرجع في المحل الأول إلى فشل أرسطو في إدراك التمييز بين كل من القضية الحملية، والقضية العامة من حيث اعتبر الصورة الأخيرة للقضية من صور القضايا الحملية، فضلا عن إخفاقه في التمييز بين القضية ودالة القضية Propositional Function والتمييز بين الفصل وفصل التصور، وتصور الفصل، وفصول الفصول Classes of Classes، وما إلى ذلك من التمييزات الدقيقة، التي عرفت ولأول مرة بصورة واضحة من ثنايا أعمال رسِّل في فجر هذا القرن، وأصبحت من التمييزات الجوهرية لأصحاب المنطق الرياضي.

والآن: إذ كان رسِّل قد تمكن من تدعيم الاتجاه المنطقي الخاص بنظرية الفصول في جوانبها التحليلية والتركيبية الرياضية، فهل تمكن من دفع المنطق الرياضي خطوات إلى الأمام، أم أن نظرته لم تفِ بالجانب التحليلي للنظرية ذاتها ؟

تناول رسِّل دراسة نظرية الفصول في أكثر من موضع من كتاباته من

أهمها: (١) «أصول الرياضيات» (١٩٠٣) حيث نجده في الفصل السادس من الجزء الأول يتناول دراسة الفصول وأهميتها بالنسبة للمنطق الرياضي، وذلك بعد أن عرض لنا في الفصل الثاني كيفية إجراء الحساب التحليلي للفصول في المنطق الرياضي وفق أراء بيانو.

(٢) «المنطق الرياضي» (١٩٠٨) وهي مقالة صدرت قبل نشر مبادىء الرياضيات، حيث يعالج فيها نظريتي الفصول والعلاقات في القسم السابع بما يلقي الضوء على الأفكار التي وردت في المبادىء.

(٣) «مبادىء الرياضيات» (١٩١٠ - ١٩١٣) ـ بالاشتراك مع هوايتهد ـ ونجده يعرض لنا النظرية العامة للفصول، وحساب الفصول، ووجود الفصول، والفصل الكلي، والفصل الصفري، في القسم الثالث من الجزء الأول.

(٤) «فلسفة الذرية المنطقية» (١٩١٨ - ١٩١٩) وهي مجموعة محاضرات ضمنها رسّل أفكاره المحورية في ثماني محاضرات، تناول في المحاضرة السابعة منها معالجة نظرية الفصول وهو بصدد معالجة مباحث الرمزية ونظرية الأنماط.

(٥) «مقدمة لفلسفة الرياضة» (١٩١٩) وفيه عرض لمسألة الفصول في أكثر من موضع؛ إلا أنه يركز على دراسة النظرية ذاتها في الفصل السابع عشر موضحاً علاقة النظرية بأبحاث الرمزية في المنطق بوجه عام.

يؤكد رسّل[١] في أصول الرياضيات، أن كوتيراه Couturat في كتابه «منطق ليبنتز La logique de leibniz» ينزع إلى مشايعة الاتجاه الما صدقي في المنطق الرياضي، على أساس أن المنطق الرياضي لا يمكن تأسيسه إلا على

(١) Russel, B., **Principles of Mathematics, 66.**

أساس وجهه النظرية الماصدقية، ومن ثم فإن « كوتيراه » يخالف اتجاه الفلاسفة الذين يشايعون وجه النظر المفهومية. إلا أن رسّل في تصوره لتأسيس المنطق الرياضي، وعلى وجه التحديد في مسألة الفصول، لا يعضد وجهه النظر المفهومية أو الماصدقية، بل يؤكد لنا أن المنطق الرياضي يقوم في مواضع وسطى بين المفهوم البحت والماصدق البحت.

وقد حاول رسّل تبرير موقفه هذا في الأصول مبيناً الصعوبات التي تكتنف تبني وجهة نظر المفهوم فقط أو الماصدق دون المفهوم. ذلك لأن الفصل يتألف من حدود، كما يكون معينا حين تكون لدينا الحدود التي يتألف منها ومن ثم فإنه لا يمكننا إقامة تعريف للفصل باستخدام الطريقة المفهومية على أنه فصل من المحمولات المتعلقة بالحدود التي لدينا فقط، أما إذا حاولنا تعريف الفصل بالطريقة الماصدقية، فإننا سنعرفه بتعداد حدوده[1] وبالتالي لن نتمكن من البحث في مسألة الفصول اللامتناهية Infinite Classes.

ومع هذا فنحن نجد رسّل، وبعد مناقشة طويلة لوجهات النظر المختلفة؛ يأخذ بوجهة النظر الماصدقية في مسألة البحث في نظرية الفصول، مؤكدا أنه لا بد من تفسير الفصل بالماصدق[2].

أما في مناقشته لتعريف الفصل في مقدمة لفلسفة الرياضة[3] فنجده يذهب إلى أن هناك طريقتين لتعريف الفصل هما:

---

(١) تؤلف مجموعة الحدود الداخلة في الفصل ما يسمى بالمجموعة aggregate أو الفئة Set ومن هذه الناحية فإن الفئة متميزة تماماً عن الفصل Class.

(٢) Russell, B., Op. cit. 79

(٣) Russell, B., **Introduction to Mathematical Philosophy,** Ch.2.

(١) الطريقة الماصدقية، التي نذكر بموجبها أعضاء الفصل.

(٢) الطريقة المفهومية، التي نذكر بمقتضاها خاصة معرفة.

ويؤكد رسّل ان التعريف بالماصدق يمكن أن يرد إلى التعريف بالمفهوم، على حين أن التعريف بالمفهوم لا يرد إلى التعريف بالماصدق.

الرموز الأساسية المستخدمة في نظرية الفصول وحسابها [١]

(١) يرمز لأعضاء الفصل بالرموز Z, Y, X.

(٢) يرمز للفصول بالرموز اليونانية [٢] φ، ψ، X، θ.

(٣) يرمز لعضوية الفرد في فصل بالرمز ε، ويقرأ Epsilon، فإذا قلنا « α ε χ » فإن هذه الصيغة تعني أن:

«x is a member of the Class a»

(٤) يرمز للضرب المنطقي Logical Product بالرمز ∩ ويقرأ «Intersection» فإذا قلنا «a ∩ B» فإن هذه الصيغة تقرأ على النحو التالي:

«a intersection B»

(٥) يرمز للجمع المنطقي Logical Sum بالرمز ∪ يقرأ «Union» فالصيغة، «a ∪ B» تعني «a Union B».

(٦) يرمز للنفي Negation بالرمز –، فقولنا «a –» يعني «not-a».

---

(١) Russell. B., & Whitehead, A.N., **Principia Mathematica. Vol. 1. pp.** **187-190. pp. 205-207. pp. 219-217**

(٢) هذه الرموز رياضية؛ وتقرأ على النحو التالي (ϕ) phi ، psi (ψ) thèta (θ), Chi (χ).

(٧) يرمز إلى الاحتواء Inclusion بالرمز ⊃ فالصيغة، «A ⊃ B» تعني «A is included in B».

(٨) يرمز للفصل الكلي Universal Class بالرمز V.

(٩) يرمز للفصل الصفرى Null-Class بالرمز Λ.

(١٠) يرمز لوجود الفصل بالصيغة E ! a وتقرأ «a exists» يعرف رسل وهوايتهد الفصل في القضية رقم ٢٠,٠٣ على النحو التالي:

$$CLS = \hat{a} \{ (\exists \phi) . a = \hat{z} (\phi ! z) \} \ Df.$$

وفي مبادىء الرياضيات نجد قضايا الفصول تندرج في ثلاثة مجموعات رئيسية هي:

المجموعة الأولى: وهي مجموع القضايا التي تهتم بدراسة خصائص الفصول Properties of Classes وتقع هذه المجموعة من القضايا في ثلاثين قضية تبدأ من القضية رقم (٢٠,١) وتنتهي بالقضية رقم (٢٠,٤٣).

المجموعة الثانية: وهي مجموعة القضايا التي تهتم بدراسة الفصول والأوصاف Descriptions معاً، وتقع في ثمانية قضايا أساسية تبدأ بالقضية رقم (٢٠,٥) وتنتهي بالقضية رقم (٢٠,٥٩).

المجموعة الثالثة: القضايا التي تعالج فصول الفصول، وهي في خمسة عشر قضية تبدأ من القضية رقم (٢٠,٦) وتنتهي بالقضية رقم (٢٠,٨١).

وهناك مجموعة القضايا الداخلة في نطاق نظرية الفصول والتي تعد بمثابة تعريفات أساسية في كتاب المبادىء، وقد أمكن لرسّل وهوايتهد حصر هذه المجموعة القضايا في إحدى عشرة قضية هي:

20.01 $F\{\hat{z}(\psi z) = (\exists \varphi)[\varphi ! x \equiv_x \psi x]$

$f\{\varphi ! \hat{z}\}$

20.02 $x \varepsilon (\varphi ! \hat{z}) = \varphi ! x$

20.03 $CLS = \hat{a}\{(\exists \varphi) . a = \hat{z}(\varphi ! z)\}$

20.04 $x, y \varepsilon a = x \varepsilon a . y \varepsilon a$

20.05 $x, y, z \varepsilon a = x, y \varepsilon a . z \varepsilon a$

20.06 $x \sim \varepsilon a = \sim (x \varepsilon a)$

والتعـريفـات في القضـايـا 20.04 ,20.05 ,20.06 تستخـدم على سبيـل الاختصار

20.07 $(a) . f a = (\varphi) . f\{\hat{z}(\varphi ! z)\}$

20.071 $(\exists a) . f a = (\exists \varphi) . f\{\hat{z}(\varphi ! z)\}$

20.072 $[(\text{ą})(\varphi a) . f(\text{ą})(\varphi a) = (\exists y)$

$[\phi a \equiv_a a = y] f y$

20.08 $f\{\hat{a}(\psi a)\} = (\exists \phi)[\psi a \equiv_a \phi ! a]$

$f(\phi ! \hat{a})$

20.081 $a \varepsilon \psi ! \hat{a} = \psi ! a$

وفي نطاق المجموعة الأولى من القضايا نجد رسّل وهوايتهد يقرران مجموعة أساسية من القضايا الخاصة ببعض خصائص الفصول والتي تعتبر جوهرية بالنسبة للنظرية وهذه القضايا هي :

20.15 $[\psi X \equiv_x X] \equiv [\hat{z}(\psi z) = \hat{z}(X z)]$

يقال لفصلان أنهما متطابقان فقط، عندما تكون الدوال المعرفة لهما متكافئة صوريا.

$$20.31 \quad [\hat{z}(\psi z) = (X z)] \equiv [x \, \varepsilon \, \hat{z}(\psi z) \equiv_X x \, \varepsilon \, \hat{z}(X z)]$$

يقال لفصلان أنهما متطابقان فقط عندما يكون لكلاهما نفس عدد الأعضاء.

$$20.43 \quad (a = B) \equiv [X \, \varepsilon \, a \equiv_X X \, \varepsilon \, B]$$

وصياغة هذه القضية تعبر عن القضية السابقة في صورة معادلة عن طريق استخدام الحروف اللاتينية بدلا من:

$$\hat{z}(x z) \text{ ، } \hat{z}(\psi z)$$

$$20.18 \quad [\hat{z}(\phi Z) = \hat{z}(\psi Z)] \supset [f\{\hat{z}(\phi Z)\} \equiv f\{\hat{z}(\psi Z)\}]$$

يقال لفصلان أنهما متطابقان حينما تنتمي أي خاصة لأحدهما للفصل الآخر.

$$20.3 \quad X \, \varepsilon \, \hat{z}(\psi Z) \equiv \psi Z$$

ينتمي حد ما إلى فصل فقط، عندما يشبع الدالة المحددة لذلك الفصل.

تلك هي الخصائص والتعريفات الأساسية في مجال نظرية الفصول العامة. أما نظرية حساب الفصول والتي تبدأ بالقضية رقم (٢٢)، وتنتهي بالقضية رقم (٢٢,٩٥)، فإننا نجد مجموعة أساسية من التعريفات الخاصة بالعمليات الحسابية التحليلية للفصول وهي:

$$22.01 \quad (a \subset B) = [(X \, \varepsilon \, a) \supset_X (X \, \varepsilon \, B)]$$

يوضح لنا هذا التعريف أن الفصل a محتوى في الفصل B أو أن «all a's are B's»

22.02 $a \cap B = \hat{x} (X \varepsilon a . X \varepsilon B)$

يعطينا هذا التعريف حاصل الضرب المنطقي، أو الجزء المشترك لكل من الفصلين a ،B.

20.03 $a \cup B = \hat{x} [(X \varepsilon a) \vee (X \varepsilon B)]$

يحدد لنا هذا التعريف حاصل الجمع المنطقي لفصلين بأنه الفصل الذي يتكون من كل الأعضاء في كل من الفصلين.

22.04 $- a = \hat{x} (X \sim \varepsilon a)$

وهذا التعريف يحدد لنا نفي الفصل بأنه يحتوي على كل الأشياء التي ليست أعضاء في (a).

وهناك تعريف آخر مختصر يضعه أصحاب المبادىء وتعبر عنه القضية رقم (٢٢,٠٥).

22.05 $a - B = a \cap - B$

ويضيف رسّل وهوايتهد في نطاق الحساب التحليلي للفصول مجموعتين أساسيتين من القضايا:

(١) مجموعة القضايا الخاصة بالقواعد الصورية

22.51 $a \cap B = B \cap a$

22.57 $a \cup B = B \cup a$

These embody the commutative Law

22.52 $(a \cap B) \cap \gamma = a \cap (B \cap \gamma)$

22.7 $(a \cup B) \cup \gamma = a \cup (B \cup \gamma)$

These embody the associative Law

22.5 $a \cap a = a$

22.56 $a \cup a = a$

These embody the Law of tautology

22.68 $(a \cap B) \cup (a \cap \gamma) = a \cap (B \cup \gamma)$

22.69 $(a \cup B) \cap (a \cup \gamma) = a \cup (B \cap \gamma)$

These embody the distributive Law

22.8 $-(-a) = a$

This is the principle of double negation

22.81 $a \subset B \equiv -B \subset -a$

This is the principle of transposition

(٢) مجموعة القضايا الخاصة بأشكال القياس

22.44 $(a \subset B) . (B \subset \gamma) \supset (a \subset \gamma)$

22.441 $(a \subset B) . (X \varepsilon a) \supset (X \varepsilon B)$

هاتان القضيتان تعبران عن القياس الأرسطي من الضرب Barbara من الشكل الأول.

22.62 $a \subset B \equiv a \cup B = B$

22.621 $a \subset B \equiv a \cap B = a$

وهاتان الصورتان تعبران عن علاقة الاحتواء في صورة معادلة.

22.91 $a \cup B = a \cup (B - a)$

أي أن أيا من a أو B متطابق مع a أو جزء من B مستبعد من a .

ويمكن لنا أن نقدم نماذج للبراهين الرياضية على بعض القضايا الخاصة بحساب الفصول لنوضح الى أي مدى أمكن لأصحاب « مبادیء الرياضيـات » الاستفادة من الافكار والتعريفات الأساسية التي توصل إليه الجهاز التحليلي لحساب الفصول المطلوب البرهنة على أن:

$$[(a \subset B) . (B \subset a)] \equiv [(X \varepsilon a)] \equiv_X (X \varepsilon B)$$

وهو ما تنص عليه القضية رقم (٢٢,٤).

البرهان

من القضية رقم (٢٢,١) والتي تنص على أن:

$$a \subset B \equiv [(X \varepsilon a) \supset_X (X \varepsilon B)$$

$$\therefore a \subset B \equiv [(X \varepsilon a) \supset_X (X \varepsilon B)] . (B \subset a)$$

$$\equiv [(X \varepsilon a) \supset_X (X \varepsilon a)]$$

ومن القضية رقم (٤,٣٨) والتي تنص على أن:

$$(p \equiv r) \supset [(p v r) \equiv (q v r)]$$

$$\therefore [(a \subset B) . (B \subset a)] \equiv [(X \varepsilon a) \supset_X (X \varepsilon B)]$$

$$[(X \varepsilon B) \supset_X (X \varepsilon a)] = [(X \varepsilon a) \equiv_X (X \varepsilon B)]$$

هـ . ط . ث

المطلوب البرهنة على أن:

$$(a \subset B) . (a \subset \gamma) \equiv a \subset B \cap \gamma$$

وهذه هي صورة القضية رقم (٢٢,٤٥) في حساب الفصول

البرهان

من القضية رقم (٢٢,١) والتي تنص على أن:

$$a \subset B \equiv [(X \varepsilon a) \supset_X (X \varepsilon B)$$

$$\therefore [(a \subset B) . (a \subset \gamma)] \equiv [(X \varepsilon a) \supset_X (X \varepsilon B)]$$
$$[(X \varepsilon a) \supset_X (X \varepsilon \gamma)] \quad (١)$$

ومن القضية رقم (١٠,٢٩) والتي تنص على أن:

$$[(X) . \phi X \supset \psi X] [(X) . \phi X \supset X x]$$
$$\equiv (X) [\phi X \supset \psi X . X x]$$

∴ يأخذ (x ε a) عاملاً مشتركاً من الطرف الأيمن في رقم (١) كما تنص على ذلك القضية رقم (١٠,٢٩) وهي قضية مبرهن عليها في جهاز المبادىء، ينتج أن:

$$(a \subset B) . (a \subset \gamma) \equiv (X \varepsilon a) \supset_X [(X \varepsilon B) . (X \varepsilon \gamma)]$$

، ∵ القضية رقم ٢٢,٢٣ تنص على أن:

$$X \varepsilon a \cap B \equiv (X \varepsilon a) . (X \varepsilon B)$$

، ∴ القضية رقم (١٠,٤١٣) تنص على أن:

$$\phi x \equiv_X X x . \psi x \equiv_X \theta x \supset [\phi x = \psi x \equiv_X Xx \equiv \theta x]$$

∴ من القضية رقم(٣٣ و ٢٢) والقضية رقم (١٠,٤١٣) ينتج أن:

$$(a \subset B) . (a \subset \gamma) \equiv [X \varepsilon a \supset_X X \varepsilon B \cap \gamma]$$
$$\equiv a \supset B \cap \gamma$$

هـ . ط . ث

المطلوب البرهنة على أن :

$$a \cap a = a$$

وهو ما تنص عليه صورة القضية رقم (٢٢,٥)

البرهان

القضية رقم (٢٢,٣٣) تنص على أن :

$$X \varepsilon a \cap B \equiv (X \varepsilon a) . (X \varepsilon B)$$

$$\therefore X \varepsilon a \cap a \equiv [(X \varepsilon a) . (X \varepsilon a)] \quad (١)$$

، ∵ القضية رقم (٤,٢٤) تنص على أن :

$$P \equiv p . p \quad (٢)$$

∴ بتطبيق صورة القضية رقم (٤,٢٤) على الناتج لدينا في رقم (١)، ينتج أن :

$$X \varepsilon a \cap a \equiv X \varepsilon a \quad (٣)$$

من (٣) ، القضية رقم (١١ ، ١٠) التي تقرر أن ما هو صادق بالنسبة للكل صادق أيضاً بالنسبة للجزء ، ومن القضية رقم (٢٠,٤٣) والتي تقرر ان :

$$[a = B] \equiv [(X \varepsilon a) \equiv_X (X \varepsilon B)]$$

ينتج أن :

$$a \cap a = a$$

هـ . ط . ث

تلك هي بعض صور القضايا في الحساب التحليلي للفصول توضح لنا كيفية البرهنة بطريقة رياضية على دقة التصورات المنطقية التي سبق افتراضها من خلال الجهاز الرياضي لنظرية حساب الفصول .

ولكننا نجد رسل وهوايتهد يخصصان القضية رقم (٢٤) بفروعها للبرهنة على الفصل الكلي، والفصل الصفري، ووجود الفصول. ومن ثم نجدهم يضعون بعض القضايا الأساسية عن خصائص كل من هذه التصورات على حدة في سلسلة من القضايا التي اعتبر بعضها بمثابة تعريفات.

التعريفات الأساسية:

(١) يعرف الفصل الكلي في القضية رقم (٢٤,٠١) بالصيغة:

$$V = \hat{x} (X = X)$$

(٢) يعرف الفصل الصفري في القضية رقم (٢٤,٠٢) بالصيغة:

$$\Lambda = - V$$

(٣) يعرف وجود الفصل في القضية رقم (٢٤,٠٣) بالصيغة:

$$\exists ! a = (\exists a) . X \varepsilon a$$

قضايا عن خصائص قضايا الفصل الكلي والصفري

(١) القضية رقم (٢٤,١٠٢) والتي تنص على أن:

$$(X) . \phi X \equiv \hat{z} (\phi Z) = V$$

وكذلك القضية رقم (٢٤,١٠٣) والتي تنص على أن:

$$(X) . \sim \phi X \equiv \hat{z} (\phi Z) = \Lambda$$

هاتان القضيتان توضحان معاً أن أي دالة صادقة دائماً تحدد الفصل الكلي، كما وأن أي دالة تكون كاذبة دائماً تحدد الفصل الصفري.

(٢) قضايا توضح صورتي قانوني التناقض والثالث المرفوع وتوضحها صورتي القضية رقم (٢٤,٢١)، القضية رقم (٢٤,٢٢).

$$24.21 \quad a \cap - a = \Lambda$$

$$24.22 \quad a \cup - a = V$$

(٣) قضايا تشير إلى خصائص الفصل الكلي والفصل الصفري بالإشارة إلى عمليتي الإضافة addition والضرب multiplication وهذه القضايا توضحها الصور الأربع الآتية:

$$24.23 \quad a \cap \Lambda = \Lambda$$

$$24.24 \quad a \cup \Lambda = a$$

$$24.26 \quad a \cap V = a$$

$$24.27 \quad a \cup V = V$$

(٤) قضايا عن خصائص التكافؤ، ويمكن تصنيفها في ثلاث قضايا أساسية هي:

$$24.3 \quad a \subset B \equiv a - B = \Lambda$$

أي أن a محتوية Contained في B تكافىء قولنا «لا شيء هو a ولكنه ليس B»

$$24.311 \quad a \subset - B \equiv a \cap B = \Lambda$$

وهذه الصيغة توضح لنا أن «لا a هي B» مكافئة لقولنا «لا شيء هو كل a، B».

$$24.55 \quad \sim (a \subset B) \equiv \exists ! a - B$$

أي أن «ليس كل ما هو a هو B، يكافىء قولنا «يوجد a وهي ليست B».

ولا تختلف طريقة البرهنة على هذه المجموعة من القضايا بصورة كبيرة عن طرق البرهنة السابقة المستخدمة في خصائص الفصول ويمكن لنا أن نتبين

كيفية البرهنة على معظم القضايا الخاصة بالفصل الكلي والفصل الصفري ووجود الفصول من النماذج البرهانية الآتية:

المطلوب البرهنة على صورة القضية رقم (٢٤,١١) والتي تنص على أن:

$$(a) . a \subset V$$

البرهان

القضية رقم (٢٤,١٠٤) تنص على أن:

$$(\dot{X}) . X \varepsilon V \qquad (١)$$

كما وتنص القضية رقم (١٠,١) عن أن:

$$(X) . \phi X \supset \phi \underset{\bullet}{y} \qquad (٢)$$

∴ من (١)، (٢) معاً ينتج أن:

$$X \varepsilon V$$

وباستخدام مبدأ التبسيط Simplification المنصوص عليه في القضية رقم (٢,٠٢) بأن:

$$q \supset p \supset q$$

$$\therefore \qquad (X \varepsilon a) \supset (X \varepsilon V)$$

، ∵ القضية رقم (١٠,١١) تنص على أن ما هو صادق بالنسبة للكل فهو صادق أيضاً بالنسبة للجزء∴

ومن القضية رقم (٢٢،١) والتي تنص على أن:

$$(a \subset B) \equiv [(X \varepsilon a) \supset_X (X \varepsilon B)]$$

ينتج أن:

$$a \subset V$$

وباستخدام القضية رقم (١٠,١١) ينتج أن :

$$(a) . a \subset V$$

هـ . ط . ث

المطلوب البرهنة على أن :

$$(a) . \Lambda \subset a \qquad 24.12$$

البرهان

القضية رقم (١٤,١٠٥) تنص على أن :

$$(X) . X \sim \varepsilon \Lambda \qquad (١)$$

، ∵ القضية رقم (١٠,١) تنص على أن :

$$(X) . \phi X \supset \phi y \qquad (٢)$$

∴ من (١) ، (٢) ينتج أن :

$$X \sim a \Lambda$$

وبتطبيق القضية ٢,٢١ ينتج أن :

$$(X \varepsilon \Lambda) \supset (X \varepsilon a) \qquad (٢)$$

∴ من رقم (٣) ومن القضية رقم (١٠,١١) التي تقرر أن كل ما هو صادق على الكل فهو صادق أيضاً على الجزء ، ومن القضية رقم (١ ،٢٢) والتي تنص على أن :

$$(a \subset B) \equiv [(X \varepsilon a) \supset_X (X \varepsilon B)]$$

∴ ينتج ان :

$$(a) . \Lambda \subset a$$

هـ . ط . ث

تلك هي بعض صور البراهين الأساسية التي نجدها في مبادىء الرياضيات والتي توضح لنا إلى أي مدى أمكن البرهنة على الفصول، والفصل الكلي، والفصل الصفري. في صيغ رياضية بحتة تقوم على غرار البرهان الرياضي من خلال القواعد الأساسية للتعريفات المستخدمة في النظرية العامة للفصول وحساب الفصول.

الفصل الثامن

نظرية العلاقات

- المصطلحات الأساسية للعلاقات

١ - مربع العلاقة
٢ - ميدان العلاقة
٣ - الميدان العكسي للعلاقة
٤ - مجال العلاقة
٥ - عدد العلاقة

- تصنيف العلاقات

• علاقات التماثل وأنواعها
• علاقات التعدي وأنواعها

- أنواع العلاقات الأساسية بين الحدود
- حساب العلاقات.

نظرية العلاقات Theory of Relations من أهم نظريات المنطق الحديث، لأنها تلعب دوراً بالغ الأهمية في أي جهاز منطقي رياضي، لأنه من النظر في مسألة العلاقات تنشأ لدينا أفكار في غاية الأهمية عن طبيعة النظرة للوجود وللعالم من حولنا. وقد عرفت مسألة العلاقات بصورة دقيقة في أبحاث دي مورجان، وتشارلز بيرس، وشرويدر؛ إلا أن تفسير العلاقات في الأبحاث السابقة على فترة رفض المذهب المثالي لم يكن جوهرياً لأسباب نوجزها فيما يلي: -

١ ـ أن المناطقة الدراسين لطبيعة المنطق من منظور رياضي لم يتمكنوا من التخلص من الصورة الأساسية للقضية الحملية التي ترد إليها كل صور القضايا الأخرى، وهذا ما كشفت عنه التحليلات المعاصرة ابتداء من رسِّل.

٢ ـ أن كثيراً من الخلط المنطقي اكتنف نظريات أصحاب المنطق نتيجة لعدم التمييز بين الفصول والعلاقات، وبين تصور الفصل، وفصل التصور، والفصول ككثير، وبين أنواع متعددة من العلاقات كشفت عنها التحليلات الرياضية للمعاصرين.

٣ ـ أن المحاولات السابقة انتهت إلى إهمال الرياضيات في المنطق بصورة كبيرة في الوقت الذي لم يتطور فيه المنطق بقدر كاف، ولذلك وجدنا

أصحاب المنطق الرياضي المعاصر يتناولـون بـالتطـويـر أولا الجهـاز المنطقي ليسير المنطق والرياضيات معـاً في خطين متـوازيين، وبحيـث يصبح من الممكن رد الصور الرياضية لصور منطقية.

ومن ثم فإننا لا نكون مبالغين إذا قلنا: إن نظريـة العلاقـات هـي أهـم جزء في النظرية المنطقية التي انطلق منها «برتراند رسِّل» لتحطيم القيود التي احتوت الفكر الفلسفي والمنطقي من جراء الخطأ في تصور العلاقة.

والحقيقة أن رسِّل تمكن بصورة واضحة مـن إقـامـة نظـريـة متكـاملـة للعلاقات في جانبيها، المنطقي والرياضي معاً بعد أن توصل إلى استكمال النسق الاستنباطي للمنطق على أسس رياضية، بحيث أصبح مسلحاً بأدوات تحليلية، ورموز فنية دقيقة، تمكنه من الوقوف في مواجهة أي نزعة تحاول أن تبتلع أبحاثه بعيداً عن الرياضيات كأسلوب واضح للعلم.

ولنظرية العلاقات ثلاثة جوانب أساسية؛ جانب منطقي، وثانٍ رياضي، وثالث فلسفي يستند إلى الصورة المنطقية التي تؤكد النظرة العلاقية. ولغرض المنطق الرياضي فإنه يتحتم علينا أن نتنـاول النظـريـة في جـانبيهـا المنطقـي والرياضي فقط، مع الإشارة الطفيفة لبعض الاتجاهات ذات الطابع الفلسفي.

والواقع أنه يتعين علينا أن نلقى الضوء على الاعتبـارات التي جعلـت رسِّـل يأخذ بالنظـرة العلاقيـة، ويُعـول كثيراً على مسـألـة العلاقـات الخارجيـة، External Relations بل ويعتبر مبحث العلاقات من مباحث المنطق التي لها قيمتها الهامة، في الوقـت الذي اقتصرت فيـه نظـرة بـرادلي على العلاقـات الداخلية.

أولا: - لمس رسِّل قصوراً واضحاً وضعفاً شديداً في المنطق التقليدي والمذاهب الفلسفية التي ارتبطت به مثل مذاهب ليبنتز واسبينوزا وهيجل وبـرادلي، لأنها تستنـد بصـورة قـويـة إلى أن «كـل قضيـة لها مـوضـوع

ومحمول »[1]، هذا إلى جانب مشاركة أصحاب المذاهب المطلقة، لأرسطو في رأيه القائل بأنه يمكن رد كل صور القضايا الأكثر تركيباً إلى صورة القضية الحملية، مما أدى إلى اعتبار القضية الحملية أبسط صور القضايا على الإطلاق.

ثانياً: - أن رسِّل حين عكف على نقد المثالية Idealism، خاصة مثالية برادلي - أقوى المدافعين عن المذهب المثالي آنذاك في انجلترا - تبيَّن أن برادلي أقام منطقه على أساس مذهب العلاقات الداخلية Internal Relations، وقد ترتب على الأخذ بهذا المذهب أن أصبحت « كل علاقة بين حدين تعبر أولا عن خصائص ذاتية الحدين »[2]. والحقيقة أن بديهية العلاقات الداخلية التي أخذ بها أصحاب المذهب المثالي، هي التي جعلت من رسِّل مدافعاً قوياً عن مذهبه الجديد، من خلال اعتراضاته على المذهب المثالي ككل، ومن ثم وجدنا رسِّل يطرح ثلاثة اعتراضات أساسية على مسألة العلاقات الداخلية، كما يذهب إلى ذلك موريس فيتز Moris Weitz في مقالة بعنوان « الوحدة والتحليل في فلسفة رسِّل » في المؤلف الضخم الذي أخرجه لنا شليب.

الاعتراض الأول: - أن مسألة العلاقات الداخلية لا يمكن الأخذ بها في حالة العلاقات اللاتماثلية Asymmetrical Relations.

الاعتراض الثاني: - أن العلاقات الداخلية لا تزودنا بأي معنى عن طبيعة الحد Nature of term.

الاعتراض الثالث: - أن القضية الأساسية التي تستند إليها العلاقات الداخلية والقائلة بأنه « يوجد موضوع واحد فقط ومحموله، هي بالضرورة

---

(١) Russell, B., «Logical Atomism,» p. 324, ed. in. **«Logic and Knowledge»**

(٢) Russell, B., **My Philosophical Development**, p. 61

قضية كاذبة لأنها تتضمن تمييزاً بين المحمول والموضوع[1].

ثالثاً: ـ أن رسِّل حين أخذ يدافع عن « فلسفة الذرِّية المنطقية » التي اتخذها مذهباً صريحاً له فيما بين الأعوام ١٨٩٩ ـ ١٩٠٠، وما يترتب على ذلك من تبنى المنطق للذرِّي في الفلسفة ؛ أخذ يشارك أصحاب الفهم المشترك الشائع Common - Sense اعتقادهم الأساسي في أشياء things كثيرة ومنفصلة، ومن ثم فقد تحتم عليه أن يقبل النتائج المترتبة على النظرة الذرِّية للأشياء من حولنا حيث أصبح العالم مكوناً من وقائع، أبسطها جميعاً الواقعة الذرِّية التي تشير إليها القضية الذرِّية بإعتبارها قضية بسيطة، وذات صورة متميزة تماماً عن القضية الحملية، وبالتالي أصبحت هناك علاقات بين القضايا وبعضها ؛ وهنا يمكن لنا تفسير العالم فلسفياً ومنطقياً على أساس مخالف لما ذهب إليه أصحاب المذهب المثالي في صورته الهيجلية على وجه الخصوص.

رابعاً ـ أن اشتغال رسِّل[2] بفلسفة الرياضيات والمنطق الرياضي، أفصح عن وجود أنواع مختلفة من العلاقات تلعب دوراً هاماً في فلسفة الرياضيات بأسرها، بل وتستند إليها، ذلك لأن جزءاً كبيراً من فلسفة

---

(١) Weitz, M., «Analysis and unity in Russell's Philosophy», pp. 60 - 61.

(٢) ظهرت أول مقالة قنية لرسِّل عن منطق العلاقات في مجلة بيانو Rivista Mathematica di بعنوان « منطق العلاقات مع بعض التطبيقات على نظرية المتسلسلات » فيما بين عامي ١٩٠٠ ـ ١٩٠١، وقد كتبها رسِّل باللغة الفرنسية، وترجمها إلى الانجليزية « روبرت تشارلز مارش » في عام ١٩٥٦ في كتاب « المنطق والمعرفة » ـ ثم تناول رسل بعد ذلك بالبحث نظرية العلاقات في بعض مؤلفاته الهامة مثل « أصول الرياضيات » (١٩٠٣)، و « مبادىء الرياضيات » بالاشتراك مع هوايتهد (١٩١٠ ـ ١٩١٣)، « معرفتنا بالعالم الخارجي » (١٩١٤) حيث عالج العلاقات معالجة فلسفية ومنطقية، « فلسفة الذرِّية المنطقية » (١٩١٨ ـ ١٩١٩) في المحاضرة الثانية، « مقدمة لفلسفة الرياضة » (١٩١٩).

الرياضيات معنىً ببحث العلاقات، ولكـل نـوع منهـا استعمال مختلـف عـن الآخر [١].

تلك هي الاعتبارات الجوهرية التي اكتسبت، من خلالها، نظرية العلاقات أهمية عظمى في نسق المنطق الرياضي المعاصر. ولكن إذا كان رسِّل قد ذهب إلى مذهب جديد في العلاقاتْ، خلافاً لما درج عليه التقليديون من المناطقة، فما هي حقيقة مذهب رسِّل في العلاقات؟ وما هي أنواعها؟ وما هي أهم الخصائص التي تكتسبها العلاقات من خلال نسق المنطق الرياضي؟ وكيف يمكن لنا أن نقوم بإجراء حساب العلاقات وفق أفكار المنطق الرياضي؟

إنه إذا ما نظرنا إلى حقيقة موقف رسِّل فيما يختص بالعلاقات، ابتداء من مقاله عن «منطق العلاقات» حتى ظهور كتابه «مقدمة لفلسفة الرياضة»، لوجدنا أنه يأخذ بالنظرة الماصدقية في تعريف العلاقـة، وأوضـح تعـريـف للعلاقـات هـو ذلـك التعـريـف الذي نجده في «مبـادىء الريـاضيـات». فتعريف العلاقة من وجهة نظر الماصدق extention يتمثل في أنها فصل الأزواج couples (y'x) التي تكون الدالة (x'y) ψ بالنسبة لها صادقة، ونص رسل في هذا التعريف صريح، حيث:

«A relation, as we shall use the word, will be understand in extension: it may be regarded as the class of Couples (x'y) for which Some given function ψ (x'y) is true» [٢]

وكان رسِّل [٣] قد ذهب في «أصول الرياضيات، إلى أن العلاقة هي ما يربط حداً بآخر، وهذا ما جعله يربط حديثه عن العلاقات، بمفهومه عن

(١) Russell, B., **Introduction to Mathematical Philosophy**, ch. v, p. 24.

(٢) Russell, B., whitehead, A. N., **Principia Mathematica**, vol. 1, p. 201.

(٣) Russell, B., **Principles of Mathematics**, 94.

القضايا آنذاك؛ لكنه عدل بعد ذلك عن هذا الموقف وتبنى صراحة وجهة النظر الماصدقية بدلا من الاعتماد على المفهوم أساساً، وذلك بعد ما تبيَّن له من أن المنطق الرياضي يستند حقيقة إلى الماصدق أكثر من المفهوم في أكثر أجزائه. ومن ثم فقد أخذ يميِّز صوراً أساسية ومتعددة عن أنـواع العلاقـات مما أتاح له الفرصة لإقامة حساب للعلاقات في « مبادىء الرياضيات ».

المصطلحات الأساسية للعلاقات

(١) مربع العلاقة Square of Relation

يعرف رسِّل مربع العلاقة بأنه « تلك العلاقة التي تنشأ بين حدين z, x عندما يوجد لدينا حد متوسط y، بحيث إن العلاقة التي لدينا تقوم بين y, x وبين «z,y» [١] ومن أمثلة هذا النوع من العلاقات علاقة « الجد للأب » والتي ينظر إليها كمربع علاقة الوالد.

(٢) ميدان العلاقة Domain of Relation

يتكون ميدان العلاقة من كل الحدود التي لها نفس العلاقة مع شيء ما أو غيره [٢].

(٣) الميدان العكسي للعلاقة Converse domain of Relation

الميدان العكسي للعلاقة يتألف من كل الحدود التي يكون لشيء ما معها نفس العلاقة [٣].

---

(١) Russell, B., **Introduction to Mathematical Philosophy**,7p. 32.

(٢) Ibid.

(٣) Ibid.

(٤) مجال العلاقة Field of Relation

يتألف مجال العلاقة من ميدان العلاقة وميدانها العكسي معاً [١]. فإذا كانت الأبوة هي العلاقة الأساسية فإن الأباء يكونون ميدان العلاقة، أما الأبناء فيكونون ميدانها العكسي، والأباء والأبناء معاً هما مجال العلاقة.

(٥) عدد العلاقة Relation - number

يعرف عدد علاقة ما معطاه لدينا بأنه « فصل كل العلاقات المتشابهة مع العلاقة التي لدينا » [٢].

تصنيف العلاقات

يمكن لنا تصنيف العلاقات في نوعين أساسيين هما : -

(١) العلاقات التماثلية Symmetrical Relations

وبين هذين النوعين من العلاقات تتدرج أنواع فرعية أخرى من العلاقات الهامة، وقد أقمنا هذا التصنيف وفقاً لفكرة رسِّل الأساسية التي أعلنها في « مقدمة لفلسفة الرياضيات » حيث يصنف العلاقات في قسمين كبيرين، هما قسمي العلاقات التماثلية والمتعدية، وفي إطار العلاقات التماثلية نجده يضيف نـوعـي العلاقـات اللاتماثليـة asymmetrical وجـائـزة التماثـل non - Symmetrical، وفي مجال العلاقات المتعديـة يصنـف نـوعين آخـريـن مـن العلاقـات هما العلاقـات اللامتغـديـة Intransitive وجـائـزة التعـدي [٣] non transitive.

---

(١) Ibid.

(٢) Ibid, p. 66.

(٣) Ibid, p. 7.

النوع الأول: علاقات التماثل وأنواعها

(١) العلاقات التماثلية

يقال لعلاقة ما أنها تماثلية [١]، إذا كانت العلاقة التي تقوم بين A ، B هي ذاتها التي تقوم بين B ، A . ومن أمثلة هذه العلاقات علاقة المساواة equality وعلاقة الأخ، والأخت، فإذا قلنا أن x = y فإن y = x .

(٢) العلاقات اللاتماثلية

أما العلاقة اللاتماثلية [٢]، فهي تلك العلاقة التي إذا قامت بين A ، B لا تقوم بين B ، A . ومن أهم أمثلة هذا النوع من العلاقة، علاقة « أكبر من » greater than وعلاقة « أصغر من Less than ، فإذا كانت B > A فإنه لا يمكن القول بأن A > B .

(٣) العلاقات جائزة التماثل

هي كل العلاقات غير المتماثلة [٣]. ومن أهمها علاقة « الأخ »، فإذا كان A أخ B فإنه قد يكون B أخت A .

النوع الثاني: علاقات التعدي وأنواعها

(١) العلاقات المتعدية

العلاقة المتعدية [٤] تكتسب هذه الخاصية، إذا ما كانت تقوم بين A ، B ، وبين B ، C فإنها تقوم أيضاً بين A ، C . ومن أمثلة هذا النوع من العلاقات،

---

(١) Ibid.

(٢) Ibid.

(٣) Ibid.

(٤) Ibid.

علاقة قبل Before ، وبعد after ، أكبر ، فوق . والعلاقات المتعدية هي في أساسها علاقات لا تماثلية ، لكنه قد يحدث في كثير من الأحيان أن تكون العلاقات المتعدية ، علاقات تماثلية ، مثل علاقة المساواة ، أو علاقة الذاتية بالنسبة للألوان ، أو علاقة التساوي في العدد .

(٢) العلاقات اللامتعدية

يقال لعلاقة ما إنها لا متعدية [١] إذا قامت علاقة ما بين A ، B ، وبين B ، C فإنها لا تقوم بين A ، C مطلقاً . ومن أمثلة هذا النوع من العلاقات ، علاقة « والد » لأنه إذا قلنا أن A والد B ، B والد C فإن هذا لا يتضمن بالضرورة أن A والد C .

(٣) العلاقات جائزة التعدي

العلاقة جائزة التعدي [٢] هي تلك التي تكتسب هذه الخاصية عندما لا تكون متعدية . ومن أمثلتها علاقة « أخ » وكل علاقات عدم التشابه dissimilarity .

أنواع العلاقات الأساسية بين الحدود

وللعلاقات أنواع كثيرة . ولكل نوع منها خصائص متعددة فضلا عما تكتسبه من أهمية بالنسبة للنسق الاستنباطي ككل . ومن أهم هذه العلاقات :

---

(١) Ibid, p. 47.

(٢) Ibid, p. 49.

(١) علاقة واحد ـ كثير One-Many

يعد هذا النوع من العلاقة من أهم العلاقات على الإطلاق خاصة في فلسفة الرياضيات، فعلاقة واحد بكثير هي « العلاقة التي تكون لحد واحد مع حد معلوم »[١]. ومن أمثلة هذا النوع علاقة والد ـ والده ـ علاقة الزوج ـ مربع كذا... الخ. فاذا قلنا أن « حسن والد أحمد »، فإنه لا يمكن لأي فرد آخر أن يكون والد أحمد سوى حسن، ذلك لأن علاقة « والد » هي في جوهرها علاقة تعبر عن الرابط الذي يربط « حسن »، « أحمد »، على حين قد يكون « لحسن » باعتباره والد « أحمد » نفس العلاقة مع أشخاص آخرين « غير أحمد ».

ومن أهم الخصائص التي تتميز بها علاقة واحد بكثير ما يلي:

أ ـ أنه يمكن لنا من الناحية الصورية البحتة أن نستغني عن كل العلاقات ونستخدم بدلا منها علاقة واحد بكثير.

ب ـ أن هذا النوع من العلاقة يدخل في كل العبارات التي لها الصورة « كذا وكذا من كيت وكيت » «the so-and-so of anch-and-such»، فالعبارة « زوجة سقراط »، تصف شخصاً ما عن طريق علاقة واحد بكثير، مع حد معلوم لدينا[٢] فالأوصاف discriptions في حقيقة أمرها أمثلة صادقة لعلاقة واحد بكثير، وكذلك جميع الدوال الرياضية mathematical functions.

حـ ـ أن أهمية تحديد علاقة واحد بكثير، تتمثل في أنه لا يمكن أن يكون لدينا أكثر من حد واحد في طرف البداية[٣].

---

(١) Ibid, p. 54.

(٢) Ibid, p. 48.

(٣) زكي نجيب محمود، المنطق الوضعي، جـ ١، ص ١٦٧.

د ـ أن حاصل الضرب النسبي[١] relative product لهذه العلاقة مع عكسها يتضمن بالضرورة مفهوم الذاتية لأن حاصل الضرب النسبي لعلاقتين R ، S هو العلاقة التي تقوم بين x ، z حينما يوجد حد متوسط y ، كأن تكون لـ x نفس العلاقة التي بين R ، y وتكون لـ y نفس العلاقة التي بين S ، Z .

(٢) علاقة واحد ـ واحد One-One

يمكن اشتقاق التعريف الصوري لهذه العلاقة من تعريف علاقة واحد بكثير ، أو بمعنى آخر هي علاقة واحد بكثير ، وكثير بواحد ، فهي تلك العلاقات التي يتضمن حاصل ضربها النسبي ، مع عكسها ، التطابق[٢]. فإذا قلنا « سقراط زوج اكسنتيب » ، فإننا إذا ما أشرنا إلى « سقراط » بالرمز A وإلى « أكسنتيب » بالرمز B ، فإنه بالنسبة للعلاقة « زوج » فإن A حد متعلق به referent على حين أن الحد B متعلق relatum . أما بالنسبة للعلاقة « زوجة » فإن الحد B يكون هو المتعلق به ، ويكون الحد A هو المتعلق ، ومن ثم فإن لكل من العلاقة وعكسها جهتان متضادتان opposite senses[٣] .

ولا شك أن هذه الخاصة من أدق الخصائص التي تميز علاقة واحد بواحد ، لأنها تزودنا بالترابط بين فصلين ، أي ترابط حد بآخر ، بحيث يصبح كل حد في أي فصل من الفصلين مترابطاً مع الحد الآخر في الفصل الآخر . وفكرة الترابط في حد ذاتها يمكن معرفتها عندما لا يكون للفصلين عضو مشترك . وتتميز علاقة واحد بواحد بخاصيتين أساسيتين هما :

(أ) **الخاصية الأولى**: أن حاصل الضرب النسبي للعلاقة وعكسها

---

(١) Russell, B., **Introduction to Mathematical Philosophy**, p. 47.

(٢) Ibid, p. 47.

(٣) Ibid, p. 49.

يتضمن التطابق، لأن حاصل الضرب النسبي للوالد والأخ هو « العم »، أما حاصل الضرب النسبي للأخ والوالد هو « الوالد ».

(ب) **الخاصية الثانية**: أن علاقة واحد بواحد تعطينا ترابطاً بين فصلين، بحيث يرتبط كل حد في أي من الفصلين بحد آخر في الفصل الآخر.

(٣) علاقة التشابه Similarity of Relations

تعتبر علاقة التشابه من العلاقات الهامة التي أولاها رسِّل عناية فائقة، ذلك لأن التشابه يكتسب عدد من الخصائص الجوهرية في نسق المنطق الرياضي والرياضيات معاً.

والفصلان من الأشياء يقال لهما إنهما متشابهان حين يكون لهما نفس عدد الحدود؛ أو بمعنى آخر؛ حين تكون علاقة واحد بواحد ميدانها أحد الفصلين، والفصل الآخر ميدانها العكس[١].

ويقال لعلاقتين P، Q إنهما متشابهتان إذا ما كانت هناك علاقة واحد بواحد حيث تكون S ميدان مجال P، وميدانها العكس مجال Q، وبحيث إذا كان للحد P علاقة مع حد آخر، فإن الحد المترابط مع الحد P تكون له العلاقة Q، مع الحد المترابط الآخر، والعكس صحيح[٢]. فالعلاقتان إذن تكونان متشابهتان إذا قامت علاقة الترابط بين حدي العلاقة.

ومن أهم الخصائص التي تتميز بها علاقة التشابه ما يلي:

(أ) أنه إذا كانت إحدى العلاقتين تتضمن التعدد، فإن العلاقة الأخرى تكون كذلك.

---

(١) Ibid, pp. 52 - 53.

(٢) Ibid, p. 53.

(ب) أنه إذا كانت إحدى العلاقتين متعدية فإن العلاقة الأخرى تكون متعدية أيضاً.

(حـ) أنه إذا كانت إحدى العلاقتين تسلسلية فإن الأخرى تكتسب نفس الصفة.

(د) أنه ما ينطبق على إحدى العلاقتين من علاقة واحدة بكثير أو علاقة واحد بواحد ينطبق على العلاقة الأخرى.

والسؤال الآن كيف يمكن لنا أن نجمع معاً كل العلاقات المتشابهة على علاقة معلومة؟

لقد أوضح رسِّل بصورة دقيقة أنه يمكن إقامة هذا الإجراء عن طريق «عدد العلاقة» الذي هو فصل كل العلاقات المتشابهة مع العلاقة التي لدينا، فأعداد العلاقات هي إذن كل فصول العلاقات التي تكون لكل العلاقات، فعدد العلاقة يتمثل في فصل العلاقات المتكون من كل العلاقات المتشابهة مع عضو واحد من الفصل، وهذه الفكرة هي مما يهم الرياضيين خاصة في مجال المتسلسلات.

حساب العلاقات

يقوم حساب العلاقات على مجموعة من القضايا الأساسية عن العلاقات التي تعد تماماً كالقضايا الابتدائية في حساب القضايا، ويستند هذا النوع من النظريات إلى مجموعة أساسية من الرموز والتعريفات:

أولا: الرموز الأساسية: Basic Symbols

تستخدم نظرية العلاقات مجموعة من الرموز الأساسية في جانبها التحليلي، ومن أهم هذه الرموز:

١ ـ يرمز للعلاقة بالحرف اللاتيني الكبير R لمتغير ظاهر apparent variable.

٢ ـ يرمز للمتغير Variable بالصيغة $x\ \hat{y}\ \phi\ i\ (x, y)$

٣ ـ يرمز للعلاقة الكلية Universal Relation بالرمز $\dot{V}$

٤ ـ يرمز للعلاقة الصفرية null Relation بالرمز $\dot{\Lambda}$

٥ ـ أنه إذا ما قامت العلاقة بين زوج واحد على الأقل من الحدود فإنه يرمز لها بالرمز «$\dot{\exists}$! R» أي « توجد R ».

٦ ـ يرمز لعكس العلاقة R بالرمز $\breve{R}$ وتقرأ «R - Converse».

٧ ـ يرمز للعلاقة بالرمز $\vec{R}$ إذا كانت تسير من (x) إلى (y)، ويرمز لها بالرمز $\overleftarrow{R}$ إذا كانت تسير من (y) إلى (x)

٨ ـ يرمز إلى ميدان العلاقة R بالرمز D‘R.

٩ ـ يرمز لعكس الميدان بالرمز D‘R.

١٠ ـ يرمز الى مجال العلاقة بالرمز C‘R.

١١ ـ يرمز إلى حاصل الضرب النسبي لعلاقتين R، S بالرمز "R I S" ويعرف أصحاب « المبادىء » العلاقة في القضية رقم (٢١,٠٣) على النحو التالي:

$$Rel = \hat{R}\ \{ (\exists\ \phi)\ .\ R = \hat{x}\ \hat{y}\ \phi\ !\ (x,y) \}$$

القضايا الأساسية عن خصائص العلاقات

(١) يقال لعلاقتين أنهما متطابقتان قط عندما تكون الدوال المعرفة لهما متكافئة صورياً Formally equivalent والصيغة الرمزية لهذه الخاصية هي

21.15 $[\ \psi(x,y) \equiv_{x,y} X(x,y)\ ] \equiv [\ \hat{x}\ \hat{y}\ \psi(x,y) = \hat{x}\ \hat{y}\ X(x,y)\ ]$

(٢) يقال لعلاقتين أنهما متطابقتان فقط عندما تقوم كل من العلاقتين بين نفس الازواج من الحدود.

21.31 $[\ \hat{x}\ \hat{y}\ \psi(x,y) = \hat{x}\ \hat{y}\ X(x,y)\ ] \equiv [\ x\ \{\ \hat{x}\ \hat{y}\ \psi(x,y)\ y\ \}\ y\ ] \equiv_{x,y} [\ x \{\ \hat{x}\ \hat{y}\ X(x,y)\ y\ ]$

ويمكن للتعبير عن هذه الصيغة بالصيغة التالية

21.43 $[\ R = S\ ] \equiv [\ X R y\ ] \equiv_{x,y} [\ X S y\ ]$

(٣) أما القضيتان الآتيتان فتوضحان أن العلاقات المتطابقة هي في جوهرها انعكاسية reflexive وتماثلية Symmetrical ومتعدية transitive

21.2 $\hat{x}\ \hat{y}\ \phi(x,y) = \hat{x}\ \hat{y}\ \phi(x,y)$

21.22 $\hat{x}\ \hat{y}\ \phi(x,y) = \hat{x}\ \hat{y}\ \psi(x,y)$

$[\hat{x}\ \hat{y}\ \psi(x,y) = \hat{x}\ \hat{y}\ X(x,y)] \supset [\hat{x}\ \hat{y}\ \phi(x,y) = \hat{x}\ \hat{y}\ X(x,y)]$

(٤) يقال لحدين أن لهما علاقة معلومة عندما يشبعان Satisfy دالة معرفة

21.3 $[\ x\ \{\ \hat{x}\ \hat{y}\ \psi(x,y)\ y\ ] = [\ \psi(x,y)\ ]$

(٥) أنه يمكن تحديد كل علاقة عن طريق دالة حملية Predicative function

21.151 $(\exists\ \phi)\ .\ \hat{x}\ \hat{y}\ (x,y) = \hat{x}\ \hat{y}\ \phi\ !(x,y)$

التعريفات الأساسية في حساب العلاقات

$$23.01 \quad (R \mathrel{\dot{\subset}} S) = [\,(x\,R\,y) \supset_{x,y} (x\,S\,y)\,]$$

$$23.02 \quad (R \mathbin{\dot{\cap}} S) = \hat{x}\hat{y}\,(xRy \,.\, xSy)$$

$$23.03 \quad R \mathbin{\dot{\cup}} S = \hat{x}\hat{y}\,[\,(xRy) \vee (xSy)\,]$$

$$23.04 \quad \dot{-}\,R = \hat{x}\hat{y}\,\{\sim (xRy)\}$$

$$23.05 \quad R \mathbin{\dot{-}} S = R \mathbin{\dot{\cap}} \dot{-}\,S$$

كما ويضع أصحاب المبادىء ثلاث تعريفات أساسية للعلاقة الكلية والعلاقة الصفرية ووجود العلاقات كما توضحها القضايا الآتية:

$$25.01 \quad \dot{V} = \hat{x}\hat{y}\,(x = x \,.\, y = y)$$

$$25.02 \quad \dot{\Lambda} = \dot{-}\,\dot{V}$$

$$25.03 \quad \dot{\exists}\,!\,R = (\exists x,y)\,.\,x\,R\,y$$

والحقيقة أن البرهنة على قضايا حساب العلاقات تسير وفق نظام البرهنة المتبع في نظرية حساب الفصول، ولذلك وجدنا رسِّل وهوايتهد وهما بصدد عرض النظرية العامة للعلاقات وحساب العلاقات لا يقدمان لنا أي نوع جديد من البرهنة، بل نجدهما يشيران إلى أنماط القضايا الخاصة بالعلاقات فقط ويحيلان القارىء إلى طرق البرهنة المستخدمة في مجال نظرية حساب الفصول، مما يؤكد أن طريقة البرهنة في مجال النظريتين واحدة. لكن ثمة أمراً جديداً وهاماً في مجال العلاقات، ويتمثل في الجزء الخاص بحساب ميدان العلاقات أو عكسها مما تتناوله نظرية العلاقات بالبحث التفصيلي والتحليل الرياضي في القسم الثالث من الجزء الأول من كتاب المبادىء بعنوان « منطق العلاقات ». ولذا فإننا سنتناول كل موضوع من موضوعات القسم الثاني على حدة لنعرض فيه لأهم القضايا وبعض نماذج البراهين.

اولا : ـ عكس العلاقات Converse of Relations

توجد لدينا في إطار هذا الموضوع ثلاث قضايا أساسية تحدد خصائص عكس العلاقة وهي :

31.13 $E\,!\,Cnv'\,P$

كل علاقة لها عكس

31.32 $[\,P = Q\,] \equiv [\,\breve{P} = \breve{Q}\,]$

يقال لعلاقتين أنهما متطابقتان فقط ، إذا ما كان عكسهما كذلك

31.33 $Cnv'Cnv'P = P$

أي علاقة هي عكس عكسها

نماذج البراهين

(١) برهن على أن

31.12 $\breve{P} = Cnv'P$

البرهان

تنص القضية رقم (٣١,١٠١) على أن

$(Q\ Cnv\ P)\,.\,(R\ Cnv\ P) \supset Q = R$ (١)

بوضع $\breve{P}$ مكان R في رقم (١) ينتج أن

$(Q\ Cnv\ P)\,.\,(\breve{P}\ Cnv\ P) \supset\ = \breve{P}$ (٢)

والقضية رقم (٣١,١١١) تنص على أن

$\breve{P}\ Cnv\ P$

وهي قضية صادقة، إذن يمكن حذفها من رقم (٢) فينتج أن

$$(Q \; Cnv \; P) \supset Q = \breve{P} \quad (٣)$$

من رقم (٣) والقضية (١٠,١١) التي تقرر أن ما هو صادق بالنسبة للكل فهو صادق أيضاً بالنسبة للجزء، ومن القضية رقم (٣١,١١١) ينتج أن

$$(\breve{P} \; Cnv \; P).(Q \; Cnv \; P) \supset_Q Q = \breve{P}$$

ومن القضية رقم (٣٠,٣١) والتي تنص على أن

$$[X = R'y] \equiv (x \; R \; y)[\; z \; R \; y \supset_z z = x$$

ينتج أن

$$\breve{P} = Cnv'P$$

هـ . ط . ث .

(٢) برهن على أن

$$31.21 \quad Cnv' \dot{\Lambda} = \dot{\Lambda}$$

البرهان

تنص القضية رقم (٣١,١٣١) على أن

$$x \,(Cnv' \; P)\, y \equiv y \; P \; x$$

بتطبيق هذه الصورة على صورة القضية رقم (٣١,٢١) التي لدينا ينتج أن

$$x(Cnv'\dot{\Lambda})\; y \equiv y \; \dot{\Lambda} \; x \quad (١)$$

وتنص القضية رقم (٢٥,١٠٥) على أن

$$(x,y) \,.\, \sim (x \; \dot{\Lambda} \; y) \quad (٢)$$

∴ من تطبيق رقم (٢) على الصورة التي لدينا من (١) ينتج أن

$$\sim X \ (Cnv`\dot{\Lambda}) \ y$$

من رقم (٣) ومن القضية رقم (١١,١١) التي تنص على أنه إذا كانت (z,ω) ϕ صادقة مهما كانت Z & ω فان

$$(x,y) \ . \ \phi \ (x,y)$$

تكون صادقة

ومن القضية رقم (١٥، ٢٥) والتي تنص على أن

$$[\ (x,y) \ . \sim (xRy)\ ] \equiv [\ R = \dot{\Lambda}\ ]$$

ينتج أن

$$Cnv`\dot{\Lambda} = \dot{\Lambda}$$

هـ . ط . ث .

ثانياً: الميادين، عكس الميادين ومجالات العلاقات Domains, Converse Domains, And Fields of Relations

يقوم حساب الميدان والميدان العكسي ومجال العلاقات على أساس مجموعة من التعريفات والصيغ الأساسية:

الصيغ الأساسيّة

(١) ميدان العلاقة $D`R = \hat{x} \{ (\exists y) \ . \ x R y \}$

(٢) عكس الميدان $\text{Ɑ}`R = \hat{y} \{ (\exists y) \ . x R y \}$

(٣) مجال العلاقة $C`R = \hat{x} \ (\exists y) \{ (x R y) \ v \ (y R x) \} \ ]$

التعريفات الأساسية

$$33.01\ D = \hat{a}\ \hat{R}\ [a = \hat{x}\ \{ (\exists\ y).\ x\ R\ y \}\ ]$$

$$33.02\ D = \hat{B}\ \hat{R}\ [\ B = \hat{y}\ \{ (\exists\ x) - x\ R\ y \}\ ]$$

$$33.03\ C = \hat{Y}\ \hat{R}\ [\ y = \hat{x}\ \{ (\exists\ y) \}\ (\ x\ R\ y)\ V\ (y\ R\ x) \}\ ]$$

$$33.04\ F = \hat{x}\ \hat{R}\ (\exists\ y)\ \{ (x\ R\ y)\ V\ (y\ R\ x) \}\ ]$$

نماذج البراهين

(١) المطلوب البرهنة على أن

$$33.22 \quad C\text{‘}R = C\text{‘}R$$

البرهان

من القضية رقم (٣٣,١٦) والتي تنص على أن

$$C\text{‘}R = D\text{‘}RUꓷ\text{‘}R$$

والقضية رقم (٣٣,٢) والتي تنص على أن

$$ꓷ\text{‘}R = D\text{‘}\breve{R}$$

والقضية رقم (٣٣,٢١) التي تنص على أن

$$D\text{‘}R = ꓷ\text{‘}\breve{R}$$

نستنتج أن

$$C\text{‘}R = ꓷ\text{‘}\ \breve{R}\ U\ D\text{‘}\ \breve{R}$$

ومن القضية رقم (٣٣,١٦)

$$\therefore \quad C\text{‘}R = C\text{‘}\ \breve{R}$$

هـ . ط . ث .

(٢) المطلوب البرهنة على أن

$$33.15 \quad \overrightarrow{R} ` y \subset D` R$$

البرهان

تنص القضية رقم (٣٢,١٨) على أن

$$x \varepsilon \overrightarrow{R} ` y \equiv xRy$$

ومنها نستنتج أن

$$x \varepsilon \overrightarrow{R} ` y \supset_x xRy$$

ومن القضية رقم (١٠,٢٤) والتي تنص على أن

$$\phi\ y \supset (\exists\ X).\ \phi\ X$$

نستنتج ان

$$x\ \overrightarrow{R} ` y \supset_x (\exists y).\ x\ R\ y$$

ومن القضية رقم (٣٣,١٣) والتي تنص على أن

$$x\ \varepsilon\ D` R \equiv (\exists y).\ x\ R\ y$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{R} ` y \supset D ` R$$

هـ.ط.ث

ثالثاً: حاصل الضرب النسبي لعلاقتين

توجد لدينا ثلاثة تعاريف أساسية في حاصل الضرب النسبي هي

$$34.01 \quad R \backslash S = \hat{x}\hat{z} [\ (\exists y).\ \{ (xRy).\ (ySz) \}\ ]$$

$34.02 \quad R^2 = R/R$

$34.03 \quad R^3 = R^2/R$

نماذج البراهين

برهن على أن

$34.54 \quad x\ R\ x \supset x\ R^2\ x$

البرهان

القضية رقم (٤,٢٤) تنص على أن

$$P \equiv P\ .\ P$$

ومنها نستنتج بالتطبيق على صورة القضية التي لدينا أن

$$xRx \supset (xRx)\ .\ (xRx)$$

ومن القضية رقم (١٠,٢٤) التي تنص على أن

$$\phi\ y \supset (\exists x)\ .\ \phi\ x$$

نستنتج أن

$$xRx \supset (\exists y)\ [\ (xRy)\ .\ (yRx)\ ]$$

ومن القضية رقم (٣٤,٥) التي تنص على أن

$$xR^2\ y \equiv (\exists z)\ [\ (xRz)\ .\ (z\ Ry)\ ]$$

∴ نستنتج أن

$$x\ R\ x \supset x\ R^2 x$$

هـ . ط . ث .

اتضح لنا مما سبق من البراهين أن نظام البرهنة في نطاق نظرية حساب العلاقات يسير وفق الجهاز العام للاستنباط في نسق مبادىء الرياضيات. إلا أن هناك صوراً أخرى متقدمة من حساب العلاقات قد استبعدت من ميدان هذه الدراسة أساساً لأنها مما يهم الرياضيين بصورة مباشرة، ولذلك فقد فضلنا أن نعرض فقط لجانب حساب العلاقات في إطار أبحاث المنطق الرياضي.

الفصل التاسع

نظرية الأوصاف

فضلنا أن نعالج نظرية الأوصاف بعيداً عن النظريات الأربعة الأساسية للمنطق الرياضي. لأن هذه النظرية تتمتع بأهمية كبرى في الجهاز المنطقي والنسق الفلسفي لرسِّل. فلم تشهد نظرية من نظريات المنطق الحديث اهتمام رسِّل المباشر، بقدر ما أتيح هذا لنظرية الأوصاف.

والواقع أن تأسيس نظرية الأوصاف يعد عملا ضخماً في عالم الفكر المنطقي والفلسفي على السواء للأسباب الآتية: -

أولا: - أن النظرية في حد ذاتها عملا ابتكارياً جديداً، فالأفكار التي تتناولها لم ترد من قبل في أعمال السابقين على رسِّل.

ثانياً: - أن النظرية تعتبر أداة منطقية مفيدة - على حد قول موريس فيتز [١] - في إقامة تمييزات منطقية دقيقة بين اسم العلم proper name و« العبارة الوصفية descripative phrase »، أو بين الرمز البسيط والرمز المركب.

ثالثاً: - ومن الناحية الإيستمولوجية فإن نظرية الأوصاف تميز بين المعرفة بالاتصال المباشر Knowledge by acquaintance والمعرفة بالوصف

---

(١) Weitz, M., Analysis and unity in Russell's Philosophy p. 95.

Knowledge by description ، رغم أننا قد نجد هذه الناحية في أعمال القديس أوغسطين Augustine ، على حد قول روبرت مارش [1] Marsh .

رابعاً : ـ أن نظرية الأوصاف هي بمثابة رد قوي على نظريات السيكولوجيين من أمثال برنتانو Brentano ومينونج Meinong .

خامساً : ـ أن رسل استطاع أن يضع نظرية الأوصاف كجزء أساسي من النسق الاستنباطي « لمبادىء الرياضيات ».

تلك هي الاعتبارات الاساسية التي عُدَّت من أجلها نظرية الأوصاف عملا ابتكاريا في مجال الفلسفة والمنطق على السواء ، والتي جعلت « فرانك رامزي » F. Ramsey يصفها بأنها « نموذج الفلسفة » [2] Paradigm of philosophy

لقد تابع رسل دراسات « فريجه » في المعنى والدلالة meaning and denoting ، حيث اهتم بدراسة التحليل المنطقي للرموز دراسة مركزة من أجل تطوير دراسات المنطق . ومن ثم فقد تحتم عليه أن يضع دراسات السابقين كعادته دائماً حينما يناقش نظرية من النظريات المنطقية تحت مجهر التحليل المنطقي الدقيق .

ومن النظريات العامة التي ركز رسّل على دراستها نظرية « برنتانو » في تحليل الإدراك إلى عناصر ثلاث هي ، الفعل act ؛ والمحتوى أو المضمون Content ، والموضوع object » والتي تابعه فيه « مينونج » [3] تحت تأثير نزعته السيكولوجية .

---

(١) Marsh, R. C., (ed) **logic and knowledge,** .: ٥٢

(٢) Ramsey, F., **The Foundations of Mathematics,** p. 263.

(٣) Russell, B., On Propositions, p. 305, ed. in. «Logig and Knowledge»

وجد رسّل أن الاتجاه السيكولوجي في تحليل الإدراك، على هذا النحو، لا يتفق مع ما ذهب إليه «وجورج مور» في اتجاهها الواقعي الجديد؛ لأن تمييز السيكولوجيين ينطوي على التمييز بين «المضمون الموضوعي» Objective Content «وموضوع الإدراك» object of perception، وهذا التمييز من وجهة نظر رسّل ومور ليس ضرورياً، لأنه ينطوي على تناقض.

والحقيقة أن رسّل في صدر شبابه وحتى تدوين «أصول الرياضيات» كان يشارك «مينونج» معظم مواقفه الأساسية، إلا أنه فيما بعد «الأصول» أخذ يراجع مواقفه الأساسية فيما يختص بنظرية المعرفة، خاصة وقد تبين له أن هذا الموقف لن يمكنه، بصفة نهائية، من دعوة المثاليين التي اتضح له فسادها. ونتيجة لمراجعة نظرية مينونج توصل رسّل لنظرية الأوصاف التي تناولها بالصياغة والشرح والتنقيح أكثر من أربعة وخمسين عاماً [١].

---

(١) ظهرت أول صياغة لنظرية الأوصاف في مقالة رسّل بعنوان On Denoting التي نشرت في مجلة مايند Mind عام (١٩٠٥) حيث عرض لنا موقفه الأساسي بالنسبة للعبارات الدالة واسم العلم، ثم أخذ يناقش موقف «مينونج».

وفي عام (١٩١٠) ناقش رسل النظرية في مبادىء الرياضيات حيث صدر الجزء الأول، وقد جاءت مناقشته للنظرية وجهازها الاستنباطي في المواضع الآتية: -

(١) من ص ٣٠ إلى ص ٣٢ (ب) من ص ٧٧! ص ٧١ (جـ) من ص ١٧٣ إلى ص ١٨٩.

وصدرت في عام (١٩١١) مقالة أخرى لرسل تتناول هذا الموضوع بعنوان:

Knowledge by Acquaintance and Knowledge by Description

لكن مناقشته للنظرية إبستمولوجيا ومنطقياً وردت بصورة خاصة في «مشكلات الفلسفة» عام (١٩١٢) The problems of philosophy. ثم تناولها مرة أخرى في مقالة صدرت عام (١٩١٤) بعنوان The Nature of Acquaintance حيث أخذ يناقش نظريات «ماخ» Mach «وجيمس» «James». وعرض لنا من خلال موقفه الأساسي نظريته المسماه (بالواحدية المحايدة) «Neutral Monism». وفي عام =

تنصب نظرية الأوصاف التي يقول بها رسّل على إقـامة تمييز بين نوعين من الرموز وهما: أسماء الأعلام، والأوصاف، فاسم العلم إن هو إلا رمز بسيط[1]، يشير إلى جزئي موجود في الخارج، وهذا الجزئي الموجود في الخارج هو معنى الرمز، والرمز هو ما يشير إليه، ويكون لاسم العلم معناه المستقل تماماً عن بقية الألفاظ التي تؤلف الجملة أو القضية.

أما الوصف، فهو رمز مركب Complex Symbole مثل « مؤلف ويفرلي » The author of Waverly. وهذا الرمز المركب لا يشير إلى الفرد مباشرة، أي الموضوع الحقيقي الموجود في الخارج، كما هو الحال بالنسبة لاسم العلم. والرمز المركب، أي الوصف يطلـق عليـه رسّـل مصطلـح الرمـز النـاقـص incomplete Symbole؛ لأنه لا معنى له بمفرده، أو بمعزل عن بقية ألفاظ القضية، لأن الوصف يكتسب معناه من خلال سياق الحديث مع غيره من الرموز.

والأوصاف تبعاً لنظرية رسّل نوعان:

أوصـاف محددة definite descriptions وهـي الأوصـاف التي تشير

= (١٩١٨ - ١٩١٩) حـاول شرح النظـريـة شرحـاً دقيقـاً مـن خلال (فلسفـة الذرية المنطقية). The philosophy of logical Atomism. وإبان فترة أرغم على قضائها بأحد السجون نتيجة لمناهضة الحرب واشتراك إنجلترا فيها، كتب رسل مرة ثانية عن نظرية الأوصاف في « مقـدمـة لفلسفـة الريـاضـة (١٩١٩) Introduction to Mathematical philosophy وقد رد رسل على بعض انتقادات (جورج مور) الخاصة بنظرية الأوصاف والتي نشرت في المؤلف الذي أعده شنيب عام (١٩٤٤) وفي عام (١٩٥٩) دوّن رسل آخر كتاباته الفلسفية: (تطوري الفلسفي) My philosophical Development حيث لخص لنا النظرية تلخيصاً دقيقاً وعرض لجوانبها الأساسية:

(١) Russell, B., P. L. Atomism, p. 244.

عباراتها إلى شيء معين، أو جزئي مسبوق بأداة التعريف « أل »، وتكون صورتها « الكذا وكذا »[1] (The So-and-So) .

(٢) **الوصف المبهم** Ambiguous وهي ذلك الوصف الذي يخبر بإبهام مثل « قابلت رجلا » وهذا النوع من الوصف يتخذ صورة « كذا وكذا » عند الحديث «a so-and-so» .

اهتم رسّل بتحليل القضايا التي تحتوي على **أوصاف محددة،** لأن تحليل مثل هذه القضايا يمكننا من الحديث عن الموضوعات المتناقضة بذاتها self-contradictory . تلك الموضوعات التي لا تقوم في الواقع الخارجي، وليست لدينا إمدادات حسية عنها، ويكون وجودها ممكناً فقط من ناحية التصور المنطقي، وبالتالي فإن القضايا التي تتضمن أوصافاً محددة، يصبح أمر معالجتها على أنها دوال قضايا ذات متغيرات أمراً سهلا . وهذا ما جعل رسّل يؤكد لنا أن العبارة:

« تدل بمقتضى صورتها، ومن ثم فإنه ينبغي أن »

« نميز بين حالات ثلاث: (١) أن العبارة قد تدل »

« ولا تدل على أي شيء في نفس الوقت مثل « المالك الحالي »

« لفرنسا »؛ (٢) أن العبارة قد تدل على موضوع »

« واحد محدد، مثل « الملك الحالي لانجلترا » فهي تدل على »

« شخص معين بالذات؛ (٣) أن العبارة قد تدل »

« بإبهام مثل « رجل ما » فإنها لا تدل على رجال كثيرين »

---

(١) Russel, B., (a) P. L. Atomism, P. 234 (b) **Introduction to Mathematical Philosophy**, ch. 16.

« بل على إنسان ما مبهم. »[١]

هنا نتساءل: ما هو تحليل رسّل للعبارات الدالة؟

ينبثق تحليل رسل للعبارات الدالة denoting phrases من فكرته عن المتغير[٢]، فإذا قلنا «X has Z» فإن هذا التعبير إنما هو دالة قضية تعتبر فيها (X) مكون أساسي غير محدد undetermined، وهنا فإنه ينظر إليها على أنها متغير.

وفكرة رسّل عن المكون غير المحدد تعتبر من الأفكار الدقيقة التي يمكن من خلالها تفسير بعض المفاهيم المنطقية مثل: « كل شيء » everything، « شيء ما » something « لا شيء » nothing؛ من حيث أصبحت عبارات دالة[٣]. ومعنى هذا أن هذه المفاهيم أصبحت من قبيل الرموز الناقصة لأنه ليست لها معنى بمعزل عن بقية أجزاء القضية. فجوهر العبارات الدالة يتمثل في أن العبارة الدالة ليست بذات معنى في حد ذاتها، بل أن كل قضية من القضايا تكتسب معناها من خلال التعبير اللفظي المتكافل والذي يضفي على القضية معناها.

فإذا قلنا « قابلت رجلا ما » «I met a man» فإن تحليل هذه العبارة وفقاً لرأي رسّل وفكرته عن دالة القضية والمتغير، يصبح:

« دالة القضية « قابلت x وأن X إنسان » ليست كاذبة دائماً ».

لكن ما هو تحليل رسّل للقضايا من نوع « المربع الدائري » أو « الملك

(١) Russell, B., On Deneting, p. 41.

(٢) Weits M., op - cit. p. 95.

(٣) Russell, B., On Denoting, p. 42.

الحالي لفرنسا » أو « الجبل الذهبي ». ما هو تحليله لصورة هذه القضايا من حيث الصدق والمعنى ؟

اكتشف رسّل التناقض الذي انتهى إليه « مينونج » في نظريته بعد تحليل دقيق للعبارات الدالة. فبينما زعم مينونج أنه يمكننا أن نتصور الشيء الذي هو « مربع » ودائري في نفس الوقت، أكد رسل أن تقرير مينونج على هذا النحو يعد خروجاً على قانون عدم التناقض؛ لأنه كيف يمكن لنا أن نثبت وجود « المربع الدائري » والواقع ينكر هذا تماماً ؟!

من هنا وجدنا رسّل يقدم لنا فكرته عن الأوصاف المحددة حتى لا يقع في التناقض الذي وقع فيه مينونج. ويتضح لنا فحوى هذه النظرية إذا ما نظرنا في صورة المثال التالي:

« مؤلف ويفرلي » The author of waverley.

« مؤلف ويفرلي » هنا ليست اسم علم، بل رمز ناقص، وقد اعتبرها رسل رمزاً ناقصاً لثلاثة أسباب:

(١) أنها رمز مركب، لأنها لا تشير إلى جزئي متحقق في الخارج.

(٢) أن معناها يتحدد، مباشرة بمجرد معرفتنا لمعاني الكلمات كالتي تتألف منها العبارة[1]. بينما إسم العلم لا يتحدد بمعاني الكلمات، بل بمعرفتنا للشخص أو الفرد الذي ينطبق عليه الاسم[2].

(٣) أنه إذا ما كانت هذه العبارة اسم علم، فانها ستصبح « سكوت

(١) ويتضح لنا ذلك بصورة أكثر وضوحاً في اللغة الانجليزية، فالمقصود بمعاني الكلمات التي تتألف منها العبارة هي الكلمات the - author - of - waverley بينما في اللغة العربية نجد لدينا لفظتان فقط هما مؤلف ـ ويفرلي.

(٢) Russell, B, P. L. Atomism, Lecture VI.

Scott كان* مؤلف ويفرلي » إما أنها قضية تحصيل حاصل أو كاذبة ومن ثم فإنه إذا كانت « مؤلف ويفرلي » اسم علم، فإنه يمكن لنا أن نضع بدلا منها اسم العلم « سكوت » وتصبح قضيتنا على الصورة:

« سكوت كان سكوت » «Scott was Scott»

أما إذا كان اسم العلم هو اسم آخر بخلاف « سكوت » فإن القضية ستصبح كاذبة .

وما يجعلنا نذهب إلى القول بأن العبارات الوصفية هي رموز ناقصة؛ أن ذلك يتمثل في أن ما تشير إليه العبارات الوصفية لا يعد من مكونات القضية[1]؛ لأنه ليس هناك كائن فعلي موجود في الخارج يمكن أن نعدّه هذا الوصف.

وما هو أساسي بالنسبة لتحليل الأوصاف المحددة، هو أنها في عملية التحليل لا تتكون من الأوصاف ذاتها، بل من القضايا التي ترد فيها. وأفضل طريقة لتحليل القضايا من هذا النوع هو أن ننظر في المناسبات التي تجعل الوصف كاذباً.

فإذا ما نظرنا للقضية « سكوت كان مؤلف ويفرلي » لوجدنا أن هذه القضية تكون كاذبة في حالات ثلاثة فقط هي:

الحالة الاولى: إذا لم تكن قصة ويفرلي كتبت فعلا .

الحالة الثانية: إذا كان هناك أشخاص كثيرين كتبوا ويفرلي.

الحالة الثالثة: إذا لم يكن « سكوت » هو الذي كتب ويفرلي.

(*) وضعنا الصورة على هذا النحو لتتفق مع صورتها النحوية في اللغة الانجليزية.

(١) Ibid.

ونفي شروط الكذب في هذه الحالات الثلاث يكون على النحو التالي:

الأقل فرد واحد كتب ويفرلي

الحالة الاولى: « X كتب ويفرلي » ليست كاذبة دائماً. أي أنه يوجد على الأقل فرد واحد كتب ويفرلي.

الحالة الثانية: « إذا كان Y, X كتبا ويفرلي، فإن Y, X يكونان متطابقان. أي على الأكثر هناك فرد واحد كتب ويفرلي.

الحالة الثالثة: « إذا كان X قد كتب ويفرلي، فإن X. كان سكوت » صادقة دائما.

ومن ثم فان القضايا الثلاث معاً تقرر أن:

« X كتب ويفرلي » تكافىء دائماً « X كان سكوت ».

وهناك مثال أخرى قدمه رسّل للعبارات الدالة التي تنطوي وفق تحليل مينونج على الخروج الصريح على قانوني عدم التناقض والثالث المرفوع. فالقضية التي تقرر أن «الملك الحالي لفرنسا أصلع » The present King of France is blad إذا ما نظرنا إليها من وجهة النظر التحليلية الدقيقة، لقلنا إنه من المعروف أنه ليس هناك في فرنسا ملوك الآن. ومن ثم ينشأ لدينا تساؤل هام: هل تكون هذه العبارة صادقة أم كاذبة؟ إنه إذا ما افترضنا كذب هذه العبارة، فإنه وفقاً للقانون الثالث المرفوع يكون التقرير Assertion بأن « الملك الحالي لفرنسا ليس أصلع » The present king of France is not blad، تقريراً صادقاً. لكن تقريرنا بأن الملك الحالي لفرنسا له رأس ذات شعر يصبح تقريراً كاذباً كتقريرنا أن « الملك الحالي لفرنسا أصلع ». لكنه يتضح لنا أن القضيتان « الملك الحالي لفرنسا أصلع »، « الملك الحالي لفرنسا

ليس أصلع » تخالفان قانون الثالث المرفوع فضلا عن أن افتراض صدقهما معاً يعد خروجاً على قانون عدم التناقض.

ومن ثم فإنه لغرض المنطق، ولعدم الإخلال بقوانينه وجدنا رسل ينظر للعبارات التي صورتها « الكذا والكذا »؛ وبصفة عامة كل وصف له هذه الصورة، لاعلى أنها صادقة أو كاذبة، بل إنها في جوهرها « بلا معنى » meaningless . وهذا هو ما جعله يتمكن من حل المشكلة الأساسية للأوصاف عن طريق استخدام الدوال الوصفية descripative Functions من حيث إنها تسمح لنا بأن نتحدث عن الأشياء التي لا تتصل بها اتصالا مباشراً (١) . واستخدامنا لفكرة الدوال هنا هو ما يسميه رسِّل « بالتعريف في الاستعمال » (٢) definition in use للوصف.

التعريفات الأساسية (٣)

14.01 $[(1 x) (\phi x)] . \psi (1 x) (\phi x) . = i (\exists b) ! \phi x \equiv_x . x = b: \psi b$

14.02 $E ! (1 x) (\phi x) . = : (\exists b) : \phi x . \equiv_x . x = b :$

14.03 $[(1 x)(\phi x) . (1 x)(\psi x)] . f \{ (1 x)(\phi x), (1 x)(\psi \chi) \} . = :$
$[(1 x) (\phi x) : (1 x) (\psi x) . f \{ (1 x)(\phi x), (1 x)(\psi x) \}$

14.04 $[(1 x) (\psi x)] . f \{ (1 x) (\phi x) , (1 x) (\psi x) \} . = :$
$[(1 x)(\psi x), (1 x)(\phi x)] \cdot f \{ (1 x)(\phi x), (1 x)(\psi x) \}$

(١) Russel, B., **The problems of philosophy**, P. 92.

(٢) Principia, V. I. P. 66.

(٣) وجدنا أنه من الافضل الابقاء عى النقط بدلا من الاقواس، لان الاقواس في قضايا الأوصاف كثير، وحتى لا تختلط مجالات الأقواس ببعضها يفضل إستخدام النقط.

نماذج البراهين

برهن على صدق القضية رقم (١٤,١١١) والتي تنص على أن:

$$[(\imath x)(x\psi)] . f\{(\imath x)(\phi x),(\imath x)(\psi x)\} .$$
$$\equiv : (\exists b, c) : \phi x . \equiv_x . x = b: \psi x . \equiv_x . x = C: f(b, C)$$

البرهان

تنص القضية رقم (٤,٢) على أن:

$$p \equiv p \qquad (١)$$

كما وتنص القضية رقم (١٤,٠٤) على أن:

$$[(\imath x)(\psi x)] . f\{(\imath x)(\psi x)\} .$$
$$= . [(\imath x)(\psi x) ، (\imath x)(\phi x)]$$
$$f\{(\imath x)(\phi x),(\imath x)(\psi x)\} \qquad (٢)$$

وتنص القضية رقم (١٤,٠٣) على أن:

$$[(\imath x)(\phi x)،(\imath x)(\psi x)] . f\{(\imath x)(\phi x)،(\imath x)(\psi x)\} . =$$
$$[(\imath x)(\phi x)] ؛[(\imath x)(\psi x)] . f\{(\imath x)(\phi x)،(\imath x)(\psi x)$$

(١)، (٢)، (٣) تتضمن أن:

$$[(\imath x)(\psi x)] . f\{(\imath x)(\phi x) ،(\imath x)(\psi x)\} .$$
$$\equiv : . [(\imath x)(\psi x)]$$
$$(\imath x)(\phi x)] . f\{(\imath x)(\phi x),(\imath x)(\psi x)\}$$

والقضية رقم (١٤,١) والتي تنص على ان:

$$[(\iota x)(\phi x)] . \psi (\iota x)(\phi x) . \equiv :(\exists b) : \phi x . \equiv_x . x = b: \psi b$$

تكافىء

$$[(x|\iota)(\psi x)] :. (\exists b): \phi x . \equiv_x . = b: f\{b, (\iota x)(\phi x)\}$$

وهذه القضية تكافىء أيضاً أن:

$$(\exists c) : . \psi \equiv_x . x = C: . (\exists b) : . \phi x . \equiv_x x = b: f(b,c)$$

، والقضية رقم (١١,٥٥) والتي تنص على أن:

$$(\exists x,y) . \phi x . \psi (x,y) . \equiv :(\exists x) : \phi x : (\exists y) . \psi (x,y)$$

تكافىء

$$(\exists c) : . \psi z \equiv_x . z = C : . (\exists b) : . \phi x . \equiv_x x = b : f(b,c)$$

∴ الطرف الأيمن يكافىء الطرف الأيسر ، وهذا يتضمن أن القضية رقم (١٤,١١١) قضية صادقة.

هـ . ط . ث

برهن على صدق القضية رقم (١٤,١٢) والتي تنص على أن:

$$E!(\iota x)(\phi x) . \supset : \phi x . \phi y . \supset_{x,y} . Y$$

البرهان

تنص القضية رقم (١٤,١١) على أن:

$$E!(\iota x)(\phi x) . \equiv : (\exists b) : \phi x . \equiv_x . x = b$$

وهذه القضية تتضمن فرضاً أن

(١) $(\exists b) : \phi x . \equiv_x . x = b$

والقضية (٤,٣٨) تنص على أن:

(٢) $p \equiv r . q \equiv S . \supset : p.q$

والقضية رقم (١٠,١) تقرر أن:

$(x) \phi . \supset \phi y$

والقضية رقم (١١,٣) تنص على أن:

(١) $. \supset . (x, \gamma) . \phi (x, y) : \equiv : (x,y) : p . \supset . \phi (x,y)$

من ٢، ٣، ٤، القضية (١١,١١) تتضمن أن:

$\phi x . \equiv_x . x = b : \supset : \phi x \phi y . \equiv_{x.y} . x = b . y = b$

وصورة القضية رقم (١٣,١٧٢) والتي تنص على أن:

$y = x . z = x . \supset .. y = z$

تتضمن أن

(٥) $\supset_{x,y} . x = y$

∴ من رقم (٥) القضية (١٠,١١) (١٠,٢٣) والتي تنص على أن:

$(x) . \phi x \supset p . \equiv : (\exists x) . \phi x . \supset . p$

ينتج أن:

(٦) $(\exists b) : \phi x . \equiv_x . x = b : \supset : \phi x . \phi y . \supset_{xy} . x = y$

من (١) (٦) يتضح لنا أن الطرف الأيمن من القضية (١٢، ١٤) يتضمن الطرف الأيسر. ــــــــــــــــــــ هـ. ط. ث

برهن على صدق القضية رقم (١٤,١٢١) والتي تنص على أن:

$$\phi x \,.\, \equiv_x \,.\, = b : \phi\, x \,.\, \equiv_x \,.\, x = C : \supset \,.\, b = c$$

البرهان

القضية (١٠,١) والتي تنص على أن:

$$(x) \,.\, \phi\, x \,.\, \supset \,.\, \phi\, y$$

تتضمن فرضاً أن:

$$\phi\, b \,.\, \equiv \,.\, b = b : \phi\, b \,.\, \equiv \,.\, b = a$$

والقضية رقم (١٣,١٥) والتي تنص على أن:

$$x = x \qquad (١)$$

تتضمن أن:

$$\phi\, b : \phi\, b \,.\, \equiv \,.\, b = c$$

∴ من صورة قانون الترابط ومن (١)، (٢) ينتج أن:

$$b = c$$

هذا يتضمن الطرف الأيمن من القضية

هـ . ط . ث

برهن على صدق القضية رقم (١٤,١٢٢) والتي تنص على أن:

$$\phi\, x \,.\, \equiv_x \,.\, x = b : \equiv : \phi\, x \,.\, \supset_x \,.\, x = b : \phi\, b : =$$
$$: \phi\, x \,.\, \supset_x \,.\, x = b : (\exists x) \,.\, \phi\, x$$

البرهان

القضية رقم (١٠,٢٢) تنص على أن:

$$(x) \,.\, \phi\, x \,.\, \psi\, x \,.\, \equiv : (x) \,.\, \phi\, x \,!\cdot (x) \,.\, \psi\, x$$

تتضمن أن:

$$\phi x . \equiv_x . x = b : \equiv : \phi x . \supset_x . x = b : x = b.$$

$$\supset x . \phi x \qquad (1)$$

والقضية رقم (١٣,١٩١) من قضايا الذاتية تؤكد أن:

$$y = x . \supset y . \phi y : \equiv . \phi x$$

بتطبيق هذه الصورة على رقم (١) ينتج أن:

$$\phi x . \equiv_x .. x = b : \equiv : \phi x . \supset_x . x = b : \phi b \quad (2)$$

والقضية رقم (٤,٧١) تنص على أن:

$$p \supset q . \equiv : p . \equiv . p . q$$

تتضمن أن:

$$\phi x . \supset . x = b : : \phi x . \equiv . \phi x . x = b$$

والقضية (١٠,٢٧) تقرر أن:

$$(z) . \phi z \supset \psi z . \supset : (z) . \phi z . \supset , (z) . \psi x$$

∴ من القضية (١٠,١١) القضية (١٠,٢٧) ينتج أن:

$$\phi x . \supset_x . x = b : \supset : \phi x . \equiv_x . \phi x . x = b$$

$$\supset : (\exists x) . \phi x . \equiv . (\exists x). \phi x . x = b$$

$$\equiv . \phi b \qquad (2)$$

وذلك باستخدام كل من القضية رقم (١٠,٢٨١) القضية رقم (١٢,١٩٥)

∴ من (٣) القضية رقم (٥,٣٢) والتي تقرر أن:

$$p . \supset . q \equiv r : \equiv p\, p . q . \equiv . p . r$$

ينتج أن:

$$\phi x . x . x = b : (\exists x) . \phi x : \equiv : \phi x . \supset_x . x = b : \phi b \qquad \text{———} (١)$$

∴ من رقم (٢) ٤ (٤) ينتج أن الطرفين متساويان

هـ . ط . ث .

برهن على صدق القضية رقم (١٤,١٢٣) والتي تقرر أن:

$$\phi (z , \omega) . \equiv_{z,\omega} . z = x . \omega = y :$$

$$\equiv . \phi (z , \omega) . \supset_{z,\omega} . z = x : \omega = y : \phi (x,y)$$

$$\equiv . \phi (z , \omega) . \supset_{z,\omega} . z = x . \omega = y : (\exists z,\omega) . \phi (z , \omega)$$

البرهان

$$(X , y) . \phi (X , y) (X , y) . \phi (X , y) :$$

$$\equiv : (X , y) : q(X , y) . \psi (X , y)$$

وهذه القضية تتضمن أن.

$$\omega (. \equiv_{z,\omega} . z = x . \omega = y'01)z , \omega$$

وتكافىء أن.

$$\phi (z , \omega) . \supset_{z,\omega} . z = x . \omega = y : z = x . \omega = y. \supset_{z,\omega} . \phi (z , \omega) \qquad \text{———} (١)$$

وصورة القضية رقم (١٣,٢١) والتي تنص على أن

$$z = x . \omega = y . \supset_{z,\omega} . \phi (z , \omega) : \equiv . \phi (x , y)$$

بتطبيق هذه الصورة على رقم (١) نجد أنها تكافىء أن

$$\phi(z, \omega) . \supset_{z,\omega} . z = x . \omega = y : \phi(X, y) \quad \text{———} (٢)$$

والقضية رقم (٤,٧١) والتي تقرر أن.

$$p \supset q . \equiv : p . \equiv . q$$

تتضمن أن

$$\phi(z, \omega) . \supset z = x . \omega = y : \supset : \phi(z, \omega) . \equiv .$$
$$\phi(z, \omega) . z = x . \omega = y$$

ومن القضية رقم (١١,١١) (١١,٣٢) التي تقرر أن

$$(x, y) : \phi(x, y) . \supset . \psi(x, y) : \supset : (1x, y) . \phi(x, y)$$
$$. \supset . (x, y) . \psi(x, y)$$

ينتج أن

$$: \phi(z, \omega) . _{z,\omega} . z = x . \omega = y : \supset : \phi(\omega \text{، ى}) . \equiv_{z,\omega} .$$
$$z = x . \omega = y : \supset : (\exists z, \omega) . \phi(z, \omega) . \equiv . (\exists z, \omega) . \phi(z, \omega) .$$
$$z = x . \omega = y . \equiv . \phi(x, y) \quad \text{———} (٣)$$

وذلك تطبق صورة القضية رقم (١١,٣٤١) (١٣,٢٢)

∴ من (٣) القضية رقم (٥,٣٣) ينتج أن

$$\phi(z, \omega) . \supset_{z,\omega} z = x . \omega = y : (\exists z, \omega) . \phi(z, \omega) :$$
$$\equiv : \phi(z, \omega) . \supset_{z,\omega} . z = x . \omega = y : \phi(x, y) \quad \text{———} (٤)$$

∴ من (٢) ، (٤) ينتج أن القضية صادقة.

برهن على صورة القضية رقم (١٤,١٢٤) والتي تقرر أن

$$(\exists x , y) : \phi (z , \omega) \equiv_{z,\omega} . z = x . \omega = y . \equiv :$$

$$(\exists x , y) . \phi (x , y) : \phi (z , \omega) . \phi (u , v) . \supset_{z,\omega,u,v} .$$

$$z = u . \omega = v$$

البرهان

تنص القضية رقم (٣,٢٧) على أن

$p . q \supset q$ ———— (١)

من (١) القضية (١٤,١٢٣) السابق البرهنة عليها ينتج أن

$$(\exists x , y) : \phi (z , \omega) . \equiv_{z,\omega} . z = x . \omega = y : \supset . (\exists x , y).$$

$\phi (x , y)$ ———— (٢)

∴ القضية رقم (١١,١) تنص على أن

$$(x , y) : \phi (x , y) . \supset . \phi (z , \omega)$$

∴ القضية رقم (٣,٤٧) تقرر أن

$$p \supset r . q . \supset s . \supset : p . q . \supset . r . s .$$

∴ من القضية (١١,١) (٣,٤٧) ينتج أن

$$\phi (z , \omega) : \equiv_{z,\omega} . z = x . \omega = y : \supset : \phi(z , \omega) . \phi (u , v) .$$

$\supset . z = x . \omega = y . u = x . v = y .$ ———— (٣)

ومن صورة القضية رقم (١٣,١٧٢) والتي تقرر أن

$$y = x . z = x . \supset . y = z$$

وتطبيق هذه الصورة على رقم (٣) ينتج أن

$$z = u . \omega = v \text{ ———— } (٤)$$

من رقم (٤) وصورة القضية رقم (١١,١١) صورة القضية رقم (٢١,٣٥) ينتج أن.

$$(\exists x , y) : \phi (z , \omega) . \equiv_{z,\omega} . z = x . \omega = y :$$

$$\supset : \phi (z , \omega) . \phi (u , v) . \supset . z = u . \omega = y \text{ ———— } (٥)$$

من رقم (٣) القضية (١١,١١) القضية (١١,٣) ينتج أن.

$$(\exists x , y) : \phi (z , \omega) . \equiv_{z,\omega} . z = x . \omega = y :$$

$$\supset : \phi (z , \omega) . \phi (u , v) . \supset_{z,\omega,u,v} . z = u . \omega \text{ ———— } (٦)$$

وبتطبيق صورة القضية رقم (١١,١) ينتج أن

$$\phi (x,y) : \phi (z,\omega) . \phi (u,v) . \supset_{z,\omega,u,v} . z = u . \omega = v :$$

$$\supset : \phi (x,y) : \phi (z,\omega) . \phi (x,y) . \supset_{z,\omega} . x = x .$$

$$\omega = y : \supset : \phi (x,y) : \phi (z,\omega) . \supset_{z,\omega} . z = x .$$

$$\omega = y : \supset : \phi (z,\omega) . \equiv_{z \mapsto \omega} . z = x . \omega = y \text{ ———— } (٧)$$

وذلك باستخدام القضية رقم (٥,٣٣) & القضية رقم (١٤,١٢٣) ومن القضية رقم (١١,٣٤) والتي تقرر أن

$$(x,y) : \phi (x,y) . \equiv . \psi (x,y) : \supset : (\exists x y) . \phi (x,y) . \equiv :$$

$$(\exists x,y) . \psi (x,y)$$

والقضية رقم (١١,٤٥) والتي تنص على أن

$$(\exists x,y) : p . \phi (x,y) : = : p : (\exists x,y) . \phi (x,y)$$

ومن القضية رقم (١١,١١) & ومن رقم (٧) ينتج أن

$$(\exists x,y) . \phi (x,y) : \phi (z,\omega) . \phi (u,v) .\supset_{z,\omega,u,v} .z = u.$$

$$\omega = v : \supset : (\exists x,y) : \phi (z,\omega) . \equiv_{\omega} z = x . \omega \text{———} (٨)$$

∴ من (٢) & (٦) وينتج أن القضية رقم (١٤,١٢٤) قضية صادقة

برهن على صورة القضية رقم (١٤,١٣) والتي تقرر أن

$$z = (\iota x) (\phi x) .\equiv. (\iota x) (\phi x) = a.$$

البرهان

القضية رقم (١٤,١) تقرر أن

$$] (\iota x) (\phi x) [. \psi (\iota x) (\phi x) . \equiv : (\exists b) : \phi x. \equiv$$
$$x = b : \psi b$$

هذه القضية تتضمن أن

$$a = (\iota x) (\phi x) . \equiv : (\exists b) : \phi x. \equiv_{x} .x = b : a = b \quad (١)$$

والقضية رقم (١٣,١٦) تقرر أن

$$x = y . \equiv . y = x \text{———} (٢)$$

والقضية رقم (٤,٣٦) تقرر أن

$$p \equiv q.\supset:p.r.\equiv_{.q.r} \text{———} (٢)$$

∴ (٢) & (٣) معاً يتضمنان أن

$$\phi x . \equiv\equiv \therefore x = b : a = b : \equiv \imath\, \phi x . \equiv$$
$$x = b : b = a$$

∴ δ القضية (١٠,٢٨١) تقرر أن

$$(x) . \phi x \equiv \psi x . \supset : (\exists x) : \phi x . \equiv . (\exists x) . \psi x .$$

∴ من القضية (١٠,٢٨١) & القضية (١٠,١١) ينتج أن

$$(\exists b) : \phi x . \equiv_x . x = b : a = b$$
$$\equiv :(\exists b) : \phi x . \equiv_x . x = b : b = a :$$
$$\equiv : (\imath x) (\phi x) = .$$

وذلك بتطبيق صورة القضية رقم (١٤,١)

∴ (١) & (٤) يتضمنان معاً صدق القضية الأصلية المطلوب البرهنة عليها .

هـ . ط . ت .

برهن على صورة القضية رقم (١٤,١١٤) والتي تقرر أن

$$(\imath x) (\psi x) = (\imath x) (\psi x) . (\imath x) (\psi x)$$
$$= (\imath x) (\chi x) . \supset . (\imath x) (\phi x) = (\imath x) (\chi x)$$

البرهان

القضية رقم (١٤,١١١) والتي سبق البرهنة عليها تتضمن أن

$$(\exists a,b) : \phi x . \equiv_x . x = a : \psi x . \equiv_x . x = b : a = b ..$$

$$(\exists c,d): \psi x.\equiv_x .x = C:Xx.\equiv_x .x = d:c = d:.$$

والقضية رقم (١٣,١٩٥) والتي تقرر أن

$$(\exists y). y = x. \phi y. \equiv . \phi x$$

تتضمن أن

$$\therefore\quad (\exists a): \phi x. \equiv_x .x = a :\psi x. \equiv_x .x = a$$

$$\therefore\quad (\exists C): \psi x.\equiv_x .x = c : Xx. \equiv_x .x = c$$

والقضية رقم (١١,٥٤) تتضمن ن

$$\therefore\quad (\exists a,C):\phi x. \equiv_x .x = a :\psi y. \equiv\equiv_{y} \therefore \equiv_x .x = a: \psi x. \equiv_x .x = C : Xx. \equiv_x .x = C$$

والقضيتان (١٤,١٢١) δ (١١,٤٢) تتضمنان معاً أن

$$\therefore\quad (\exists a,c): \phi x. \equiv_x .x = a : Xx. \equiv_x .x = c:a = c$$

$$\supset \therefore (\imath x)(\phi x) = (\imath x)(Xx)$$

وذلك باستخدام القضية رقم (١٤,١١١) وهذا يتضمن أن القضية الأساسية قضية صادقة.

هـ. ط. ت.

القسم الثاني

مرحلة ما بعد برنكيبيا والتطور المعاصر للمنطق الرياضي

الفصل العاشر

لويس والتضمن الدقيق

يشير الاستعراض المنطقي لأبحاث المنطق حتى صدور البرنكيبيا إلى أن المنطق التقليدي منطق ثنائي القيم؛ بمعنى أن القضية الواحدة قد يكون لها أحد قيمتين: إما أن تكون القضية صادقة Ture ، أو أن تكون كاذبة Flase ، وقد تم التعبير عن هذه الخاصية التي تكتسبها القضايا بصورة واضحة وصريحة في ذلك المبدأ المنطقي الهام الذي صاغه أرسطو قديماً بعنوان « مبدأ الثالث المرفوع » Principle of Excluded Middle (Tertium non datur) .

إلا أن التطورات المنطقية والرياضية الحديثة، منذ القرن التاسع عشر، كشفت عن إمكانية التفكير بصورة أوسع وأشمل بعيداً عن المنطق الثنائي القيم. وعلى سبيل المثال نحن نجد أنه من الصعب في كثير من الأحيان في الرياضيات، وبعض فروع العلم الأخرى، أن يصرح بقيمتين للقضايا؛ إما لأنه لا يمكننا أن نبرهن على صدق القضايا أو كذبها، أو لأن نسبة أي من قيمتي الصدق أو الكذب للقضايا يفضي بنا إلى تناقضات Contradictions . ولقد أثبتت نظرية فيرما Fermat صحة هذا الرأي الأخير، حين ذهب هذا الرياضي الحاذق إلى أنه لا يمكننا أن نحل المعادلة $X^n + Y^n = Z^n$ ، في حالة ما إذا كانت $(n > 2)$. ورغم الجهود المضنية التي بذلها الرياضيون فلم يستطع أحدهم إثبات أن نظرية فيرما صادقة أو كاذبة. ومعنى هذا أن المعادلة تتجاوز نطاق مبدأ الثالث المرفوع، ولا تخضع له مباشراً.

لقد أجبر هذا الموقف الأخير المناطقة على السعي وراء محاولة العثور على قيم Values أخرى بدلا من صادق أو كاذب لبعض القضايا، وبالتدريج اتجه المناطقة إلى تصورات الجهة [١] Modal Concepts مثل: ممكن Possible - مستحيل impossible - حادث Contingent - ضروري necessary. ومثل هذه التصورات يمكن أن ننسبها للقضايا التي ليست هي صادقة أو كاذبة. من هنا نشأت فكرة المنطق الذي يسمح بثلاث قيم للقضايا، وهو ما نسميه المنطق ثلاثي القيم،... الخ. كما أن هناك مصطلحاً آخراً يطلق على المنطق الذي يتبنّى أكثر من قيمتين للصدق وهو مصطلح «منطق الجهة» Modal Logic، أو قد يستخدم المصطلح «المنطق متعدد القيم» Many - valued Logic.

ومع أن منطق الجهات أو المنطق المتعدد القيم قد نشأ تحت تأثير المشكلات والصعوبات الرياضية والمنطقية (مثل مشكلة القضايا المخالفية [٢]

---

(١) تصور الجهة من التصورات المنطقية الهامة التي استخدمها أرسطو، وقد أشار الدكتور عبد الحميد صبره في مقدمته التحليلية الرائعة التي كتبها لتحليل «نظرية القياس الأرسطية» إلى هذه النقطة حيث يقول «يدل أرسطو على الجهات modalities بهذه الالفاظ التي نوردها مع ترجمتها الانجليزية:

anagcaion: necessary

adynaton: impossible

dynaton: possible

endechomenon: contingent

وهو يستخدم اللفظين الأخيرين على سبيل الترادف في كتاب العبارة. ولكن لهما أحيانا في كتاب «التحليلات الاولى» معنيين مختلفين. لذلك وجب التمييز بينهما في الترجمة. راجع: يان لوكاشيفتش، نظرية القياس الأرسطية، ترجمة عبد الحميد صبره، منشأة المعارف، الاسكندرية، ١٩٦١، ص ٣٠.

(٢) يختلط الأمر على بعض المعربين أحياناً حين يترجمون المصلح الإنجليزي Paradox، وقد جرينا وراء محاولة لتعريب المصطلح بصورة تفي بأغراض البحث المنطقي، ولكن تبين لنا بعد عناء البحث أن أفضل ترجمة هي تلك التي قام بها الدكتور عبد الحميد صبره، والتي =

Paradoxical. Proposition أو القضايا الرياضية التي تقبل البرهان)؛ إلا أن لهذين النوعين من المنطق أهمية في الأبحاث المعاصرة، وليس أدل على هذا من تلك الأفكار القيمة التي دفع بها إلى المنطق الرياضي - منذ بداية القرن الحالي - المنطقي الأمريكي لويس[1] C. I. Lewis والتي أراد من خلالها تنشيط الأبحاث المنطقية في اتجاهات جديدة تستمد قوتها من المنطق الرياضي في صورته المعدلة كما وضعها «رسل - هوايتهد» في «برنكيبيا ماتيماتيكا»، وفي

= يحلل فيها ترجمته للمصطلح على النحو الآتي: «من الكلمات التي يصعب ترجمتها إلى العربية كلمة «Paradox». والأصل في إطلاق هذه الكلمة أن تقال على الرأي doxa الخارج أو الشاذ، ومعنى الخروج أو الشذوذ هو ما تدل عليه الأداة Para. فتطلق مثلا كلمة Paradoxes على آراء زينون الأيلي في امتناع الكثرة والحركة لخروج هذه الآراء على ما يبدو أنه مقبول من الجميع. وقد يكون الخروج خروجاً عن البديهة والعقل؛ وحينئذ يبدو الرأي الخارج كأنه يحوي تناقضاً. لهذا ترجم بعضهم كلمة «Paradox» بـ «المتناقضة». وقد تصح هذه الترجمة في بعض الأحيان إلى حد ما. وقد يجوز أن تترجم كلمة «Paradox» في بعض استعمالاتها الشائعة بلفظ «المفارقة» ولكن لتلك الكلمة في المنطق الحديث معنى اصطلاحياً لا مفر من التمييز بينه وبين التناقض تمييزاً قاطعاً، وقد دللنا على ذلك المعنى بكلمة «المخالفة». فالقضية «المخالفية» «Paradoxical» هي قضية يلزم عند افتراض صدقها أنها كاذبة. ويلزم عند افتراض كذبها أنها صادقة؛ في حين أن القضية المتناقضة هي قضية كاذبة وحسب. والمناطقة حين يتكلمون عن «مخالفات» رسل مثلا، إنما يقصدون قضايا من ذلك النوع الذي وصفناه».

راجع: يان لوكاشيفتش؛ نظرية القياس الأرسطية، ترجمة عبد الحميد صبره، ص ٢٣.

(١) من أهم كتابات لويس في المنطق الرياضي:

- A survey of Symbolic Logic, Berkeley, 1918.
- « Alternative Systems of logic», Monist, 42, 1932.
- Lewis, C.I & C. H. Langford., Symbolic Logic, New york, 1932.

ويعد الكتاب الأول والكتاب الثالث الذي كتب بالاشتراك مع لانجفورد من أهم إسهامات لويس في المنطق الرياضي على الإطلاق، وسوف نعتمد عليهما معاً في تتبع أفكار لويس بالإضافة إلى بعض الكتابات الأخرى مما سنذكره في حينه.

نفس الوقت تحاول حل بعض المعضلات الأساسية التي لا زالت تستحوذ على اهتمام المناطقة وعلماء الرياضيات منذ ظهرت المتناقضات والقضايا المخالفية.

ولذا فإننا نفضل أن نتعرف على أفكار لويس المنطقية حتى نقف على مدى التطور الذي حدث في المنطق الرياضي في بعض أفكاره وقضاياه الأساسية، خاصة وأن هذه التطورات امتدت عبر نصف قرن من الزمان، ظل لويس يتابعها متابعة دقيقة منذ بداية القرن الحالي وحتى منتصفه أو ما يزيد، مما يثبت أصالته في البحث ودقته وبراعته وحيويته الفكرية.

لويس وفكرة التضمن

بدأ المنطقي الأمريكي لويس أبحاثه المنطقية من خلال نقد تصور التضمن كما عرفه برتراند رسل. فمن وجهة نظر لويس يأخذ رسل بفكرة التضمن المادي، وهذا ما لا يتفق مع أفكار لويس الأساسية، رغم أن لويس يستخدم قاعدة رسِّل القائلة «القضية الكاذبة تتضمن أي شيء والقضية الصادقة متضمنة في أي شيء». مثال ذلك (القضية الكاذبة تتضمن أي شيء) «القمر مكون من الجبن الأبيض، تتضمن القضية ٢ + ٢ = ٤». في نسق رسل للتضمن المادي ينتج أنه يوجد فصل من القضايا لا يمكن تطبيقه على الاستدلال الصحيح، وبصورة مماثلة يكون الفصل الفارغ محتوى في أي فصل.

يرى لويس أن النتائج الشاذة التي تنتج لدينا في هذه الحالات ترجع إلى أن علاقة التضمن عند رسل علاقة ما صدقية، لذلك فإن لويس يتجه إلى تحديد علاقة التضمن بصورة أدق بحيث تصبح هذه العلاقة وكأنها الأساس الدقيق لإنجازه المنطقي.

يعرف لويس التضمن الدقيق Strict Implication على النحو التالي: «من المستحيل أن p تكون صادقة، q كاذبة». وعلى هذا الأساس يحاول تقديم

علاقة مفهومية بين q,p حيث يربطها بتصور « الضرورة » **necessity** وهذا هو التضمن الدقيق. ويستخدم لويس بعض الرموز الخاصة لتمييز فكرة التضمن الدقيق عن فكرة رسل، وتنحصر رموزه في ثلاثة أنواع:

١ - الرمز ~ ويشير به للاستحالة impossible

٢ - الرمز - ويشير به للسلب Negation

٣ - الرمز ⥽ ويشير به للتضمن الدقيق Strict Implication

وبناء على هذه الأفكار الثلاثة يضع لويس التعريف الآتي للتضمن الدقيق [١]:

$$p \prec q = \sim (p. - q) \qquad \text{df}$$

ويقرأ هذا التعريف كما يلي:

« من المستحيل أن p تكون صادقة و q تكون كاذبة »

لكن إذا كان لويس قد أراد أن يضع ذلك التعريف الدقيق للتضمن

---

(١) نحن نلاحظ أن لويس بهذا التعريف قد أدخل الجهات modalities إلى أنساق المنطق الرياضي؛ وقد كان « ماك كول » Hugh Mac Coll أول من استفاد من تصور الجهة في مؤلفه « المنطق الرياضي وتطبيقاته » (Symbolic logic and its Applications) الذي صدر في عام ١٩٠٦، وقد اعتمد لويس على مؤلفات ماك كول في هذه الفكرة. كذلك كان ماك كول يضع في اعتباره توقع الصدق أو الكذب فيا يتعلق بموجهات الأحكام modalities of Judgments: الضرورة، الحقيقة، الإمكانية. وطبقاً لرأي ماك كول فإن المحمولات الأساسية للأحكام هي: اليقين، المستحيل؛ صادق، كاذب، المتغير. ومعنى المتغير هو أنه ليس يقينياً ولا مستحيلا. إن المتغير من الممكن أن يكون صادقاً ومن الممكن أن يكون كاذباً. وحتى نكون أكثر دقة، فإن العبارة القائلة: من الممكن لقضية p أن تكون صادقة أو كاذبة، هذه العبارة تعني أن القضية غير يقينية. ومن الواضح - عكس نسق رسل - أن التطورات التي قدمها ماك كول ثم تبناها لويس فيا بعد لها ما يقابلها في اللغة العادية.

كبديل لتعريف رسل، فإنه يترتب على هذا أن يزودنا بنسق تختلف مقدماته عن ذلك النسق المألوف عند رسل ـ هوايتهد، أو ما نعرفه بنسق البرنكيبيا. وقد فعل لويس، إذ نحن نجده يرتب أفكاره المنطقية في نسق دقيق بصورة توحي بأننا على وشك الالتقاء بالوريث الشرعي للبرنكيبيا.

لويس ونسق المنطق الرياضي

يبدأ نسق المنطق الرياضي عند لويس بمجموعة من الأفكار الابتدائية، ثم مجموعة من التعريفات وهي ثلاث، تتلوها القضايا الابتدائية التي تعد بمثابة مسلمات النسق، والتي تأخذ أرقاماً على غرار الترقيم المعهود في البرنكيبيا، ثم ينتقل لويس من هذه وتلك إلى النظريات والبرهنة عليها مستخدماً ثلاث قواعد أساسية هي الاستبدال، والتقرير اللاحق؛ والاستدلال.

أولا: الأفكار الابتدائية

١ ـ القضايا، ويرمز لها بالرموز r, q, p، ....

٢ ـ السلب مثل p ~ وتعني « p كاذبة » أو «not - p».

٣ ـ حاصل الضرب المنطقي Logical Product مثل p q أو (p q) وتعني أن كلا من p، q صادقتان.

٤ ـ الامكانية Possibility أو الاتساق الذاتي Self-Consistency مثل '◇p' وتعني أن « p ممكنة » أو تقرأ « من الممكن أن تكون p صادقة ».

٥ ـ التكافؤ المنطقي logical Equivalence مثل p = q وهي أيضاً علاقة التعريف [١].

(١) لقد تبنى لويس في كتابه A survey of symbolic logic الفكرة الابتدائية « الاستحالة » والتي يشير إليها بالرمز (~) بدلا من الإمكانية. وحتى لا تختلط الفكرة بالسلب فقد أشار =

ثانياً: التعريفات Definitions

١ - تعريف الفصل Disjusction (p v q) ويعنى على الأقل واحدة من القضيتين p أو q تكون صادقة. ويعرف الفصل كما يلي:

$$11.01 \qquad p \vee q = \sim(\sim p \sim q)$$

٢ - تعريف التضمن الدقيق بدلالة السلب والامكانية وحاصل الضرب المنطقي.

$$11.02 \qquad p \dashv q = \sim \Diamond (p \sim q)$$

ويقرأ هذا التعريف كما يلي:

« ليس من الممكن أن تكون p صادقة، q كاذبة ».

٣ - علاقة التعريف « التكافؤ » ويعرفها على أنها تضمن دقيق مزدوج كما يلي:

$$11.03 \qquad p = q = p \dashv q . q \dashv p$$

ثالثاً: القضايا الابتدائية

وهذه القضايا كما سبق أن ذكرنا تعد بمثابة مسلمات النسق [1]، وهي:

= لفكرة السلب بالرمز (–)، ولكنه أخيراً في كتابه Symbolic logic الذي دونه بالاشتراك مع لا بجفورد حذف هذه الفكرة حتى يتجنب الاختلاط، ووضع فكرة الإمكانية التي رمز لها بالرمز (◊). ومن ثم فإن تصور الاستحالة عنده يعرف عن طريق علاقتين هما السلب العادي (~) Ordinary Nagation والإمكانية (◇) بحيث أن الرمز (◊ ~) ككل يعني عدم الامكانية.

(١) لقد بين ماكينزي J. C. C Mckinsey في مقالة له بعنوان A Reduction in the Number of Postulstes for C. I. Lewis's System of Strict Implication ص ٤٢٥ - ص ٤٢٧ أن المسلمة الخامسة 5.11 يمكن أن تشتق من المسلمات الخمس الأخرى.

11.1 $p q \prec q p$

11.2 $p q \prec p$

11.3 $p \prec p p$

11.4 $(p q) r \prec (q r)$

11.5 $p \prec \sim (\sim p)$

11.6 $(p \prec q . q \prec r) \prec p \prec r$

11.7 $(p q \prec q) \prec q$

لكننا نلاحظ أن لـويس في أول كتـابـاتـه « مسـح للمنطـق الرمـزي » « ١٩١٨ » بدأ بالمسلمات الآتية:

(1) $p q \prec q p$

(2) $q p \prec p$

(3) $p \prec p p$

(4) $p (q r) \prec q (p r)$

(5) $p \prec \sim (\sim p)$

(6) $(p \prec q . q \prec r) \prec p \prec r$

(7) $\Diamond p \prec p$

(8) $p \prec q = \sim \Diamond q \prec \sim \Diamond p$

لكننا حتى في هذه الحالة يمكن أن نصل إلى النتيجة.

$$\sim \Diamond p = \sim p$$

أي أن « الاستحالة متطابقة مع الكذب »، ومن ثم ينتهي التمييز الذي حاول لويس إقامته بين التضمن الدقيق والتضمن المادي، وبالتالي يصبح من الممكن رد نسقه إلى ذلك النسق المعروض في البرنكيبيـا، وهـذا بطبيعـة الحال

يقودنا إلى ضرورة مراجعة نسق لويس ومحاولة استبدال المسلمة رقم « ٨ » بالمسلمة الآتية:

$$(8') \qquad p \prec q \prec r . \sim \Diamond q \prec \sim \Diamond p$$

وربما تنبه لويس إلى مثل هذه الفكرة، حين كتب المنطق الرمزي في عام ١٩٣٢ بالتعاون مع لانجفورد Langford حيث حاول أن يضع نسق المنطق في صورة أكثر صورية بحيث يمكن البرهنة فيه على عدد قليل من النظريات، ولذلك فقد أطلق على هذا النسق المصطلح S1، أي النسق 1 الذي يستند إلى المسلمات من 11.1 إلى 11.6، وبالتالي تم تعديل النسق المعروض في مؤلفه « مسح للمنطق الرمزي » مرة أخرى على أساس المسلمات « ١ ـ ٧ » بالإضافة إلى المسلمة (8′) وأطلق على النسق في هذه الحالة S3.

رابعاً: النظريات

يمكن اشتقاق نظريات النسق عن طريق تطبيق عمليات الاستبدال أو التقرير اللاحق أو الاستدلال حيث:

١ ـ الاستبدال **Substitution**

أ ـ أي قضايا مرتبطة بعلاقة التكافؤ (=) يمكن أن نضع الواحدة منها مكان الأخرى.

ب ـ في أي قضية فإن أي متغير p, q, r، ... يمكن أن نضع بدلا منه قضية أخرى « أو متغير قضائي ».

والطريقة التي يمكن بواسطتها أن تحدد الرموز الابتدائية « الأفكار الابتدائية » لتكون قضايا يمكن تعريفها كما يلي:

ـ p, q, r, ... قضايا.

- إذا كانت p قضية، إذن p, p ◇ هي قضايا.
- إذا كانت q, p قضايا إذن (p . q)، (p = q) هي قضايا أيضاً.

٢ - التقرير اللاحق **Adjunction**

إذا أمكن تقرير القضيتين q, p منفصلتين إذن فمن الممكن تقرير حاصل ضربهما أي (p q).

٣ - الاستدلال **Inference**

إذا أمكن تقرير p, q ⥽ إذن فمن الممكن أيضاً تقرير q.

والإجراء الذي يمكن عن طريق تطبيقه تصبح هذه العملية معدَّة للبرهنة على أن النظرية ذاتية، مشابه لـذلـك الإجـراء الذي اتبعـه رسـل وهـوايتهـد في البرنكيبيا، وهنا يمكن التوصل لسلسلة من النظريات.

التضمن الدقيق والتضمن المادي.

كما نعلم فإن رسل يعرف التضمن المادي والتكافؤ المادي كما يلي:

$$p \supset q = (p . \sim q)$$

4.01 $p \equiv q = (p \supset q) . (q \supset p)$

فاذا وضعنا في الاعتبار التعريف الذي يقدمه لويس للتضمن الدقيق، فإنه يمكن وضع التعريف الآتي:

12.81 $p ⥽ q ⥽ \sim (p \sim q)$

وعلى أساس قاعدة الاستبدال (١) فإننا نحصل على.

14.1 $p ⥽ q ⥽ (p \supset q)$

أي « إذا كانت p تتضمن q تضمنا دقيقا فإن p تتضمن q تضمنا ماديا أيضاً » والعكس غير صحيح.

ومن ثم فإنه يمكننا القول بأن التضمن المادي أوسع وأشمل من التضمن الدقيق، ويترتب على هذا أنه إذا كانت $q \prec p$ مبرهنة، فإن $p \supset q$ مبرهنة أيضاً كحقيقة واضحة. وبهذه الصورة فإن كل المسلمات والتعريفات في نسق البرنكيبيا يمكن للبرهنة عليها في نسق التضمن الدقيق. إلا أننا نجد أن نسق برنكيبيا في عملياته البرهانية يستخدم الاستبدال والاستدلال المرتبط بالتضمن المادي للبرهنة على كل النظريات المعروضة داخل النسق؛ لكن نسق لويس يستخدم الاستبدال كعملية أساسية للبرهان، ولا يشير إلى استخدام الاستدلال داخل النسق، ومع هذا فإن النسق يفتح الباب لامكانية استخدام الاستدلال، حيث:

14.29 $p \,.\, p \supset q \prec q$

ذلك لأن $p \,.\, p \supset q$ هي نظرية، كما أن $p \supset q$، p نظريات أيضاً عن طريق التقرير اللاحق. ومن ثم فانه بتطبيق 14.29 يمكن استنتاج أن القضية q هي نظرية أيضاً، ويترتب على هذا أن أي شيء يمكن أن يستنبط بالطرق المألوفة في برنكيبيا ماتياتيكا فإنه يمكن أن يستنبط أيضاً في نسق لويس.

علاقة الاتساق The Consistency Relation

وقد يلاحظ أيضاً أن تصورات الاتساق واستقلال قضيتين لا يمكن إيضاحها تماما في حدود وتصورات التضمن المادي. وفي اللغة العادية يقال لقضيتين إنهما متسقتان مع بعضهما حينما تأخذ أيهما كمقدمة كذب الأخرى، وبلغة المنطق الرياضي فإن.

$$(p \sim q)$$

أو

$$\sim (q \supset \sim p)$$

ويقال لقضيتين إنهما مستقلتين إذا لم يمكن اشتقاق كلاهما من الأخرى كمقدمة.

$$\sim (p \supset q)$$

و

$$\sim (q \supset p)$$

ونحن نعلم أن مسلمات أي نظرية رياضية أو منطقية يجب أن تكون مستقلة ومتسقة، ولكننا إذا قبلنا تصور قابلية الاستنباط الذي تعبر عنه علاقة التضمن المادي، فإنه سيصبح من الواضح أنه لن توجد قضيتان متسقتان ومستقلتان مثال ذلك.

15.3 $\sim (p \supset q) \dashv p \supset \sim q$

هذه النظرية تقول «إذا لم يكن من الممكن اشتقاق 'q من p' إذن «q، 'p غير مستقلتين».

كذلك فإن

15.32 $\sim (p \supset \sim q) \dashv p \supset q$

تعني «إذا كانت p، q غير متسقتين إذن يمكن اشتقاق q من p»، ويترتب على هذا المعنى نتيجة هامة هي أن p، q ليستا مستقلتين. وبلغة التضمن الدقيق التي يستخدمها لويس فإن هذه المواضع المخالفية تختفي إذا

أخذنا في اعتبارنا المماثلات التي تعبر عنها النظريات الآتية، والتي لا يمكن البرهنة عليها ومن ثم فهي كاذبة:

$$\sim (p \dashv q) \dashv p \dashv \sim q$$

$$\sim (p \dashv q) \dashv p \dashv q$$

$$\sim (p \dashv q) \dashv q \dashv p$$

على هذا النحو يبدو لنا أن تصور الاتساق يأخذ معناه الذي يقترب من المعنى الدارج للكلمة إذا نظرنا لعلاقة التضمن كعلاقة اشتقاق. لقد رمز لويس لعلاقة الاتساق بالرمز O، وهو يعرف هذه العلاقة كما يلي:

17.01 $\quad poq = \sim (p \dashv \sim q)$

وهذا التعريف يعني أن «p، q متسقتان». وهذه الصيغة تفضي بنا إلى مجموعة أخرى من الصيغ في منطق لويس.

ولكن السؤال الهام الآن: كيف يعالج لويس دوال الموجهات؟ وهل يمكن أن نتبين الأبعاد الجديدة في منطق لويس فيم يتعلق بالموجهات؟

دوال الموجهات وكيفية اختزالها في منطق لويس

رغم أنه من الممكن البرهنة على التكافؤ الآتي:

18.1 $\quad \diamond p = pop = \sim (p \dashv \sim p)$

إلا أن لويس لاحظ أنه يمكن استخدام هذا التعريف في تعريف تصور الإمكانية إذا أخذنا في الاعتبار تصور الاتساق أو التضمن الدقيق كمفهوم ابتدائي، حيث:

من 18.1 '$\diamond$ p' «p ممكنة» تعني أن «p متفقة مع ذاتها» أو أن «p تتضمن نفيها الذاتي».

والتعبير $(\diamond p) \sim$ الذي نكتبه كما يلي $\sim \diamond p$ يعني « من الكذب أن p ممكنة » أو « p مستحيلة » أو « p ليست متفقة مع ذاتها » أو « p تتضمن نفيها الذاتي:

$$18.12 \quad \sim \diamond p = \sim (p \circ p) = p \prec \sim p$$

التعبير $(\sim p) \diamond$ أو $\diamond \sim p$ يعني « من الممكن أن p تكون كاذبة » أو « ليست p صادقة بالضرورة »، أو إذا أخذنا في اعتبارنا التكافؤات:

$$18.13 \quad \diamond \sim p = \sim p \circ \sim p = \sim (\sim p \prec p)$$

هذه التعبيرات تعني أن « نفي p ليس متسقاً » أو أن « صدق p لا يمكن أن يستنبط من نفيها الذاتي ».

والتعبير $[\,\diamond (\sim p)\,] \sim$ أو $\sim \diamond \sim p$ الذي يضعه لويس يعني: « من المستحيل أن تكون p كاذبة ». وبالتالي فإن « p تكون صادقة بالضرورة »، أو بالصورة الرمزية الآتية:

$$18.14 \quad \sim \diamond \sim p = \sim (\sim p \circ \sim p) = \sim p \prec p$$

أي « نفي p ليس متسقاً » أو « يمكن اشتقاق صدق p من نفيها الذاتي »، وعلى هذا فإنه يمكن مقارنة التكافؤات الآتية:

$$18.1 \quad p = p \sim (\sim p) = \sim (p \supset \sim p)$$

$$18.12 \quad \sim p = \sim [\, p \sim (\sim p)\,] = p \supset \sim p$$

$$18.13 \quad \sim p = \sim p \sim p = \sim (\sim p \supset p)$$

$$18.14 \quad p = \sim (\sim p \sim p) = \sim p \supset p$$

فإذا وضعنا العلاقات الدقيقة 0 ، $\prec$ بدلا من العلاقات المادية الحاصل

الضرب المنطقي والتضمن المادي في التكافؤات السابقة، فإن التمييزات بين: ممكن، صادق، ضروري، وبين مستحيل الكذب، ممكن الكذب، يمكن استبعادها، ويصبح المنطق بذلك منطقاً ثنائي القيم. وحتى يوضح لويس التصورات: يمكن، مستحيل، ضروري، فإنه يدخل التمييز بين المعنى النسبي Relative والمعنى absolute لهذه الجهات. والمعنى النسبي - كما يستخدمه لويس - يشير إلى العلاقة بين القضية الملائمة وبين حالة الوقائع المعينة مثل، المعطيات الأولية، معرفتنا عن الواقعة الملائمة للحظة معينة، وهكذا. ومن هذا المنطلق فإن المصطلح «ممكن» عند لويس يعني الاتساق مع حالة الأشياء الملائمة. أما المصطلح «مستحيل» فيعني اللااتساق مع حالة الوقائع. والمصطلح «ضروري» يعني ما تتضمنه حالة الأشياء القائمة. ومن جهة أخرى فإن المعنى المطلق يشير إلى القضية، وعلاقتها الذاتية وعلاقتها بنفيها. ومثل هذه العلاقة تنتج من التحليل المنطقي للقضية الملائمة. ومن ثم فالمعنى الملائم للإمكانية يصبح أوسع من المعنى المطلق بل ويتضمنه.

يعالج لويس الجهات في معناها المطلق ويؤسس علاقات الجهة الآتية:

18.4	$p \prec \Diamond p$	الصدق يتضمن الإمكانية
18.14	$\sim \Diamond p \prec \sim p$	الاستحالة تتضمن الكذب
18.42	$\sim \Diamond \sim p \prec p$	الضرورة تتضمن الكذب
18.5	$p \prec q . \sim \Diamond \sim \prec \sim \Diamond p$	

«إذا لم يكن التالي ممكناً، إذن فالمقدم مستحيل أيضاً».

18.52 $p \prec q . \Diamond \sim q \prec \Diamond \sim p$

«إذا كان التالي ممكن الكذب، إذن فالمقدم ممكن الكذب أيضاً».

تطوير نسق الموجهات عند لويس وحجة بيكر

اعتبرت أفكار لويس فيما يتعلق بنسق قضايا الموجهات من الإسهامات الجيدة والدقيقة في المنطق الرياضي المعاصر. ولكن بيكر Becker أسس حجة عن نسق لويس للموجهات، يبدأ فيها بالإشارة إلى أن لويس كان معنياً بالحديث عن ست جهات فحسب هي: صادق ـ كاذب ـ ممكن ـ مستحيل ـ ممكن الكذب ـ ضروري. مع الوضع في الاعتبار الجهات التأليفية مثل $\sim\Diamond\sim\sim\Diamond$ التي ذكرها لويس في منطقة عام ١٩٣٢ والتي تعني أنه «من الضروري أنه مستحيل». لقد برهن ماكينزي Mackinsey في مقالة له بعنوان «برهان على أنه توجد موجهات متعددة في نسق لويس S_2» على أنه في النسق S_2 وفي النسق S_1 أيضاً يوجد عدد لانهائي من هذه الموجهات المركبة غير القابلة للرد. ولقد أوضح ماكينزي أيضاً كل الجهات من النوع $\Diamond \ldots \Diamond\Diamond\Diamond$ أو $\Diamond$ غير قابلة للرد ومن ثم فإن الجهات عن طريق التأليفات تفضي إلى موجهات جديدة غير قابلة للرد، وهذا يعني أن نسق لويس نسقاً مفتوحاً.

يرى بيكر أنه إذا اضيفت المسلمة ٨ إلى المسلمات 11 1-11.7 11 في نسق لويس فانه ينتج.

$$(8) \qquad p ⥽ q ⥽ \Diamond p ⥽ \Diamond$$

لكن بيكر يحاول تطوير رمزية لويس إلى رمزية أفضل بحيث يقضي على بعض الصعوبات التي يمكن أن تعترض البرهنة على القضايا. ولذا فإنه يستخدم الرمز $\Box$ ليعني به «أنه من الضروري».

$$\Box p = \sim\Diamond\sim p$$

القضية «p ضرورية» تعني «من الكاذب أنه ممكن أن تكون p كاذبة» أو «من المستحيل أن تكون p كاذبة».

ويبدأ بيكر في وضع بديهيات النسق بصورة جديدة حيث.

$$\Box p \prec \Box\Box p$$

أي « الضرورة تتضمن ضرورة الضرورة». وهذه البديهية تسمح باختزال الجهات كما يلي:

$$\Box^n p \; \Box p$$

$$\Diamond^n p = \Diamond p$$

وينتج عن ذلك أن

$$p \prec p \prec \Box p \prec \Box q$$

$$\Box p \prec \Box \Diamond \Box p$$

$$\Diamond \Box \Diamond p \prec \Box p$$

$$(\Box \Diamond)^n p = \Box \Diamond p$$

$$(\Diamond \Box)^n p = \Diamond \Box p$$

$$(\Box \Diamond)^n p = \Box \Diamond p$$

$$(\Diamond \Box)^n p = \Diamond \Box p$$

وباستخدام المبرهنات السابقة فإن كل الموجهات المركبة يمكن اختزالها في ١٤ موجهة أساسية. فعلى سبيل المثال عندما تتكون الموجهة من خط النفي البسيط ~ ، فإنه إذا طبقنا قاعدة النفي المزدوج على اعتبار أنها ضرورية فإن القضية p تنتج (إذا كان عدد علامة النفي ~ صحيح).

$$(\sim)^{2n} p = p$$

أو أن نفي p ~ (إذا كان عدد علامة النفي شاذا)

$$(\sim)^{2n+1}\ p = (\sim)^{2n}\ p = \sim p$$

وهكذا فان الموجهات غير التامة تختزل إلى موجهتين أساسيتين: الصدق 'p'، الكذب '~ p'. وتكون الموجهات تامة Proper عندما يظهر الرمز □ أو الرمز ◇ فعلا. وعلى أساس النظريات المؤسسة نحصل على الموجهات المثبتة غير القابلة للاختزال كما يلي:

$$\Box\Diamond\Box \qquad , \Box\Diamond \qquad , \Box$$
$$\Diamond\Box\Diamond \qquad , \Diamond\Box \qquad , \Diamond$$

ومن السهولة بمكان أن نلاحظ أن الموجهة السلبية تناظر موجهة مثبتة، إذا أضيفت علامة النفي في النهاية. ومن ثم يوجد لدينا ٣ + ٣ مثبتة، ٣ + ٣ منفية، ٢ موجهة غير تامة، ويصبح العدد الاجمالي لهذه الموجهات ١٤ موجهة أساسية غير قابلة للرد أو الاختزال، وبالتالي يوجد عدد من التضمنات الدقيقة بين التضمنات الست المثبتة، خاصة:

$$\Box p \prec \Box\Diamond\Box p \prec \Diamond\Box p \prec \Diamond\Box\Diamond p \prec \Diamond p$$
$$\Box p \prec \Box\Diamond\Box p \prec \Box\Diamond p \prec \Diamond\Box\Diamond p \prec \Diamond p$$

ويمكن استخدام السهم → بدلا من العلامة ⥽ وبالتالي يمكن كتابة العلامات السابقة على هذا النحو:

$$\Box p \rightarrow \Box\Diamond\Box p \begin{array}{c} \rightarrow \Diamond\Box p \leftarrow \\ \rightarrow \Box\Diamond p \leftarrow \end{array} \Diamond\Box\Diamond p \rightarrow \Diamond p$$

تلك هي التضمنات الأساسية، وقد برهن W.T. Parry على أنه لا توجد تضمنات أخرى. لكننا إذا ما مضينا في دراسة الموجهات في نسق لويس، فسوف يتضح لنا أن بيكر Oskar Becker يضيف مسلمة أخرى للنسق S_4 هي:

$$\Diamond p \prec \Box \Diamond p$$

وينتقل من هذا إلى تعريف النسق S_5 الذي تقبل فيه الموجهات الرد إلى ٦ موجهات فقط هي:

أ - موجهتين غير تامتين [p صادقة، p ~ كاذبة].

ب - أربع موجهات تامة، اثنتان منهما مثبتتان (صادق بالضرورة p □، ممكنة الصدق p ◇) واثنتان سالبتان (كاذب بالضرورة أو مستحيل p ~ □، ممكن الكذب p ~ ◇).

الفصل الحادي عشر

لوكاشيفتش والمنطق متعدد القيم

أسهم المنطقي البولندي « يان لوكاشيفتش »[1] Jan Lukasieweiz في إثراء الدراسات المنطقية المعاصرة، فصحح وعدل، وحذف وأضاف، وطور

(١) لخص الدكتور تشسلاف ليبفسكي Czeslaw Lejewaki حياة يان لوكاشيفتش والآراء المنطقية الهامة التي قدمها ومدرسته في المقدمة التي كتبها للطبعة العربية التي جاءت ترجمة لكتاب نظرية القياس الأرسطية، والتي قام بها الدكتور عبدالحميد صبره. حيث يقول: « ولد يان لوكاشيفتش في لفوف سنة ١٨٧٨ . ودرس في الجمنازيوم الفيلولوجي هناك، حيث تلقى معرفة متينة باللاتينية واليونانية. فكان باستطاعته حتى بلوغه السبعين أن يلقى عن ظهر قلب أشعاراً من هوراس وفقرات من هوميروس. وفي سنة ١٨٩٧ انتظم في جامعة لفوف لدراسة الرياضيات والفلسفة « وبعد أن أتم برنامجاً دراسياً تحت إشراف الأستاذ تفاردوفسكي Twardowski حصل على شهادة الدكتوراه في الفلسفة سنة ١٩٠٢ . وعاد إلى لفوف سنة ١٩٠٦ حيث عين محاضراً في الفلسفة ومما يجدر ملاحظته أن سلسلة محاضراته الأولى كان موضوعها « جبر المنطق » وظل يقوم بالتدريس في جامعة لفوف حتى بداية الحرب العالمية الاولى، وفي سنة ١٩١٥ انتقل إلى وارسو ليحاضر في الفلسفة في جامعتها ثم ترك الجامعة عام ١٩١٨ ليشغل وظيفة عالية في وزارة التربية البولندية، وفي سنة ١٩١٩ كان وزير التربية في حكومة باديريفسكي، وفي نهاية ذلك العام استأنف حياته الأكاديمية فكان حتى سبتمبر ١٩٣٩ أستاذاً للفلسفة في جامعة وارسو - وفي خلال هذه المدة دعي لشغل وظيفة مدير للجامعة مرتين الأولى ١٩٢٢ - ١٩٢٣ ، والثانية عام ١٩٣١ - ١٩٣٢ » .

وفي الأيام الاولى من الحرب العالمية الثانية دمرت شقة لوكاشيفتش في غارة جوية. - وأتى الحريق الذي نشب في أثر ذلك على مكتبته كلها - وفيها مؤلفاته المخطوطة ومذكراته ... =

المفاهيم والمصطلحات، وأخذ بيد الدراسات المعاصرة في المنطق الرياضي وزودها بدفعات قوية حفزت المناطقة من بعده، أو على الأقل جيل تلامذته من المدرسة البولندية، إلى تطوير أبحاث المنطق بما يتلائم مع طبيعة الدراسة في هذا العلم.

ومن أهم الابحاث التي أثراها لوكاشيفيتش « تلك الخاصة بتصور الجهة في

= كان لوكاشيفتش أقدم تلامذة كاتسيميرتس تفاردوفسكي (١٨٦٦ - ١٩٣٨) الذي تلقى دراسته الفلسفية على فرانز برنتانو Franz Brentano في فينا... وكان اهتمام تفاردوفسكي في الفلسفة منصباً على تحليل المعاني. فكان يمرن تلامذته على التفكير الواضح، ولكنه لم يدعهم ينسون أن تحليل المعاني ليس غاية في ذاته وإنما هو مدخل إلى الفلسفة.

ونحن نجد أيضاً صفتي الدقة والاحكام اللتين تستلزمها هذه الطريقة في أول بحوث لوكاشيفتش الهامة وهو البحث المرسوم « في مبدأ التناقض عند أرسطو »، نشر هذا البحث بالبولندية سنة ١٩١٠... وفي هذا الكتاب يبين لوكاشيفتش أن عند أرسطو ثلاث صيغ مختلفة لمبدأ التناقض؛ الصيغة الأولى أنطولوجية أو وجودية. والثانية منطقية والثالثة سيكولوجية... ويتأدى لوكاشيفتش من النظر في الصيغة الأنطولوجية للمبدأ إلى مناقشة مسألة المخالفات التي كان اكتشافها بمثابة صدفة للمشتغلين بالفلسفة والرياضيات في ذلك الوقت...

ولا شك في أن لوكاشيفتش قد استوحى تصوره للمنطق الثلاثي القيم من معالجة أرسطو للحوادث الممكنة المستقبلة في كتاب « العبارة »، وأما الاعتبارات الصورية كتلك التي أدت بالمنطقي ا. ل. بوست E.L.Post بعد ذلك بأربع سنوات إلى نتائج مشابهة، فلم يكن لها إلا دور ثانوي في تفكير لوكاشيفتش. وكان لوكاشيفتش يرمي من إنشاء نسق منطقي ثلاثي القيم الى صياغة نظرية تحوي القوانين التقليدية في المنطق الموجه « وقد حاول أيضاً بإنشاء ذلك النسق أن يتغلب على مذهب الحتمية الفلسفي، وهو مذهب كان يعتقد أنه لازم عند التسليم بمبدأ ثنائية القيم ولكنه عدل فيا بعد عن اعتقاده ذاك » فلم يعد يرى تمانعاً بين انتفاء الحتمية والمنطق الثنائي القيم. وبعد إنشاء النسق المنطقي الثلاثي القيم صار من الواضح أنه يمكن إنشاء نسق رباعي القيم أو خماسي القيم أو نسق عدد القيم فيه أي عدد تشاء، بل نسق يحوي ما لا نهاية له من القيم.

راجع نظرية القياس الارسطية « ترجمة عبدالحميد صبره » المقدمة من ص ٤٠ - ص ٥١.

المنطق، فقد تابعها عن كثب وحاول ما وسعه الجهد أن يقدم الحساب المنطقي المتكامل لما نسميه الآن « المنطق متعدد القيم » «many - valued logic» وفي تحليل لوكاشيفيتش للموجهات نلتقي بالأفكار الابتدائية الآتية:[1]

١ - p قضية ويرمز لها بالرمز p

٢ - p قضية كاذبة ويرمز لها بالرمز Np أي (non - p)

٣ - p قضية ممكنة ويرمز لها بالرمز Mp (ويلاحظ أن الحرف M في رمزية لوكاشيفتش مأخوذ من الكلمة الألمانية Moglich التي تعني (possible).

٤ - p ليست ممكنة ويرمز لها بالرمز NMp

٥ - («non - p») ممكنة ويرمز لها بالرمز MNp

٦ - («non - p») ليست ممكنة ويرمز لها بالرمز NMNp

كذلك فإن لوكاشيفتش يحاول أن يحدد التضمن بدقة، ويستخدم الرمز C الذي يشير إلى التضمن ليميز فكرته عن فكرة رسِّل وفكرة لويس أيضاً. فالعبارة «p implies q» التي نلتقي بها في منطق رسِّل تكتب في رمزية لوكاشيفتش بالصورة:

C p q

وتعني إذا كانت p صادقة إذن q صادقة أيضاً

C p q: ‘‘If p then q’’

---

(١) أثرت أن أقدم الرمزية التي يستخدمها لوكاشيفتش في منطقه كما هي لأن تعريبها كما هو معروض في ترجمة عبد الحميد صبره يؤدي بالقارىء إلى الوقوع في خطأ تكرار بعض الحروف المستخدمة.

ويطلق لوكـاشيفتش على الرمـوز M,N,C في رمـزيتـه مصطلـح روابـط «Functors» .

والواقع أن لوكاشيفتش استطاع أن يستمد أفكاره الجديدة من بعض القضايا الهامة التي عثر عليها في المنطق الكلاسيكي وهي :

القضية الأولى تكون النتيجة صحيحة حينما ننتقل من الوجود الضروري إلى الوجود .

القضية الثانية تكون النتيجة صحيحة حينما ننتقل من الوجود إلى الوجود الممكن .

القضية الثالثة من المستحيل إلى اللاوجود فإن النتيجة صحيحة (إذا كانت p ليست ممكنة إذن non - p) .

القضية الرابعة إذا وجد شيء ما فان وجوده يكون ضرورياً (وهذه القضية وجدها كوكاشيفتش عند ليبنتز الذي أكتشف أنه أخذها عن أرسطو من كتابه De Interpretatione .

القضية الخامسة إذا افترضت non - p إذن p ليست ممكنة .

القضية السادسة بالنسبة لأي قضية p فإنه إما p أو non - p ممكنة .

لقد أشار لوكاشيفتش إلى القضيتين الموجهتين الأوليتين بالصورة الرمزية الآتية

1. C N Mp Np «NMp implies Np

2. C N p N M p «N p implies N Mp

وحتى يمكن اشتقاق قضايا أخرى مـن الصيـاغـات فـإن لـوكـاشيفتش يستخدم مثل رسِّل قـاعـدتين للاستنبـاط هما : (١) قـاعـدة التعـويـض

Substitution و (٢) إثبات التالي Modus ponens ويطلق عليهما معاً قاعدة الفصل detachment . كذلك نحن نجد أن لوكاشيفتش يطلق على القضية الصادقة المصطلح مقررة 'thesis' ، وهو يقبل أربعة قضايا أخرى صادقة بخلاف القضيتين السابقتين، وبذا يصبح مجموع القضايا الصادقة في نسقه ٦ قضايا ، وهذه القضايا تعد بمثابة المقررات (١) theses الأساسية لنسقه ، وهي كما يلي :

المقررات

١ ـ CNMPNP

٢ ـ CNpNMp

٣ ـ CCNqNpCpq

٤ ـ CCNpqCNqp

٥ ـ CCpNqCqNp

٦ ـ CCpqCCqrCpr

وفي هذه المقررات نلاحظ أن ١، ٢ هما القضيتان ١، ٢ السابقتان، وأن المقررات ٣ ، ٤ ، ٥ هي صور مختلفة لمبدأ النقل Principle of transpoition أما المقررة السادسة فهي تمثل القياس الشرطي hypothetical Syllogisan .

---

(١) الترجمة مقرر thesis مأخوذة عن عبدالحميد صبره، فيقول « وكل قضية من قضايا النسق أو النظرية فنحن نقرر صدقها ؛ أما المسلمات فنقرر صدقها على سبيل التسليم، وأما المبرهنات فنقرر صدقها باعتبارها لازمة عن المسلمات، لذلك يطلق على كل قضية صادقة في النظرية أو النسق كله كلمة مقررة thesis » والمقررات إذن تشمل المسلمات والمبرهنات فكل المسلمات والمبرهنات مقررات، لكن المقررات بعضها مسلمات وبعضها الآخر مبرهنات ».

راجع مقدمة عبدالحميد صبره لنظرية القياس الارسطية ، ص ٢٦ ـ ٢٧ .

ولكن كيف يمكن إجراء البرهنة عند لوكاشيفتش ؟

خذ المثال الآتي عن كيفية البرهنة

3 p / Mp × C 1 - 7

يعني هذا المثال أنه في المقررة ٣ نرفع p ونضع بدلا منها Mp ، فنحصل على التضمن، وأن المقررة (١) تتضمن المقررة (٧)، وما دامت المقررة (١) صادقة فإن المقررة (٧) يمكن الحصول عليها وفقاً لمبدأ إثبات التالي.
وإذا تقدمنا بمثل هذه الطريقة أمكن أن نحصل على المقررات الآتية:

٧ - CpMp

٨ - CNpMNP

٩ - CNMNpp

١٠ - CNMNpMp

١١ - CNMpMNP

١٢ - CMPP

١٣ - NPNP

١٤ - NMNP

١٥ - MPNMNP

١٦ - CMNPNMP

لكنا نلاحظ أن المقررات السابقة تنطوي على بعض النتائج المخالفة، مثال ذلك المقررة ٧ ، المقررة ١٢ .

٧ - CpMp (p تتضمن إمكانية p)

١٢ - CMpp (إمكانية p تتضمن p)

وهذان التضمنان يعنيان أنه في المنطق الثنائي القيم فإن التعبيرين Mp, p متكافئان، ووفقاً لهذا فإن.

Mp 'to be possible'

تكافىء

p 'to be true'

والأبعد من هذا أن يان لوكاشيفتش يجد بعض النتائج المخالفية الأخرى حينما يحلل النتائج التي يحصل عليها من القضية الموجهة الثالثة. وحتى يعبر عن هذا فإنه يلجأ إلى استخدام السور الذي يشير إلى التبعيض Particularization $\sum$ والسور الذي يشير إلى التعميم Generalization Π (والرمزان أخذهما لوكاشيفتش من تشارلز بيرس المنطقي الأمريكي).

'$\sum$ p' = 'For a certain p'

'Π p' = 'For all P'

ومن ثم فالقضية الثالثة يمكن التعبير عنها فقط باستخدام هذه الأسوار. ولكن لوكاشيفتش يضيف رمزاً آخراً لعلامة الوصل Conjunction وهو الرمز K.

'Kpq' = 'p and q'

وبهذه الصورة يمكن كتابة المقررة الثالثة في صورة رمزية كما يلي:

١٧ - $\sum$ pKMpMNP.

وتقرأ هذه الصيغة كما يلي:

« بالنسبة لقضية معينة p، إما p أو non-p ممكنتان »

وباستخدام سور التعميم Π في المقررة ١٧ فإنها تصبح:

١٨ - NΠpNKMPMNP

وتقرأ كما يلي:

« ليس من الصادق أنه بالنسبة لأي قضية p أن يكون كاذباً أن p ممكنة وتكون non-p بدورها ممكنة ».

وبتطبيق قواعد الاستنباط السابقة فإن لوكاشيفتش يؤسس المقررات الآتية بالتتابع:

١٩ - C K M p M N p M q

٢٠ - C C p q C N q N p « نقل التضمن ».

٢١ - C N M q k M p M N p

٢٢ - C N M q Π p N K M p N p

٢٣ - M p.

ونحن نلاحظ أن المقررة (٢٣) تعني أن « p ممكنة » على اعتبار أن p أي قضية اختيرت بصورة عشوائية. وهكذا فإننا إذا بدأنا من القضية الثالثة فإننا نتوصل إلى النتيجة القائلة بأن « كل شيء ممكن » وأن لا شيء مستحيل، وبالتالي فإنه لا شيء ضروري. وما هو أبعد من هذا أنه إذا اتحدت المقررة (١٢) مع المقررة (٢٣) فسوف تنتج لدينا مقررة جديدة هي (٢٤)، حيث:

١٢ - C M p p.

٢٣ - M p

٢٤ - p

وهذه المقررة الأخيرة تعنى أن أي قضية p هي صادقة.

لوكاشيفتش والمنطق ثلاثي القيم

لقد سبق ان أشرنا، ونحن بصدد الحديث عن بدايات منطق الموجهات، أن المنطق التقليدي ثنائي القيم، أي أنه ينسب للقضية قيمة صدق وقيمة كذب فقط. وقد نشأ هذا الوضع من طبيعة مبدأ الثالث المرفوع ذاته، الذي يقرر أن القضية إما صادقة أو كاذبة، وهذا المبدأ يعتبر أساسي للمنطق الكلاسيكي بأسره، ولكن هناك قضايا أخرى مثل، من الممكن أن أكون في القاهرة يوم ٣٠ يناير. أمثال هذه القضية لا يمكن القول بأنها ضرورية أو صادقة أو كاذبة، في الوقت الذي تم تقريرها فيه (لأن هذه القضايا عند أرسطو تدخل في باب المستقبل الحادث). ولذلك فإن لوكاشيفتش يقدم قيمة ثالثة لمثل هذه القضية وهي القيمة ممكن 'Possible' وبناء على هذه الفكرة فإننا إذا رمزنا للمصطلح صادق بالرمز 1 وللمصطلح كاذب بالرمز 0، فإن لوكاشيفتش يعطي القيمة 1/2 للمصطلح ممكن. كذلك فهو يرمز للسلب Nagation (الرابط functor) بالرمز N، ويضع القائمة الآتية التي توضح قيم القضية ونفيها.

p	0	1/2	1
N p	1	1/2	0

الواضح من هذه القائمة أن الاختلاف الوحيد بين هذا المنطق والمنطق ثنائي القيم هو أن Np, Mp يمكن أن تأخذ القيمة 1/2. والقيم الأخرى هي قيم متناظرة تماماً كما في المنطق ثنائي القيم.

أما في حالة التضمن C فإنه يمكن تأسيس القائمة بصورة مماثلة لكي تناظر القيم الثنائية على النحو التالي:

C	0	1/2	1
0	1	1	1
1/2	1/2	1	1
1	0	1/2	1

لقد حاول لوكاشيفتش[٤] أن يعثر على تعريف دقيق لتصور الإمكانية قبل عام ١٩٢٠، ولكن ألفرد تارسكي وهو من أبرع تلامذته أمكنه أن يقدم مثل هذا التعريف عام ١٩٢٠ حيث يعرف الإمكانية:

D_2 $$M\,p = C\,N\,p\,p$$

أي أن « p ممكنة » تعرف « إذن non-p إذن p ».

والتعبير 'CN pp' الذي يحدد إمكانية قضية ما p يكون كاذباً فقط عندما تكون p ذاتها كاذبة، وفي كل الحالات الأخرى فإن هذا التعبير صادق. ووفقاً لهذا فإن.

$$M_0 = 0 \quad , \quad M\ 1/2 = 1 \quad , \quad M_1 = 1$$

وعلينا أن نلاحظ أنه في الحساب ثنائي القيم فإن التعبير 'CNpp' مكافىء لـ 'p'، ولكن هذا لا ينطبق في حالة الحساب ثلاثي القيم - Three

(١) نلاحظ أن لوكاشيفتش في بداية أبحاثه تبنى تعريف الإمكانية البحتة وفقاً للصيغة:

D_1 M p = A Ep Np Πq NCp kpNq

حيث الرابط A يعني الفصل المنطقي، بينما E تشير إلى التكافؤ المنطقي. ويمكن قراءة الصيغة كما يلي:

« p ممكنة » تعني إمام أو non-p متكافئتان أو أنه لا يوجد أي زوج من القضايا المتناقضة من p. ولكن لوكاشيفتش امتنع عن استخدام هذا التعريف بعد أن قام تارسكي تعريفه.

valued Calculus (حيث توجد ثلاث قيم هي 0 ،١/ 2 ,1) حيثما تكون الحالة 1 = M 1/2 . وعلى هذا فإن المقررة ثنائية القيم 'CCNppp' ليست صحيحة في الحساب ثلاثي القيم إذا كانت قيمته p هي 1/2 .

كذلك فإن لوكاشيفتش يعرف الضرورة كما يلي:

$$N\ M\ Np = N\ Cp\ Np \qquad D_3$$

أي أن:

« 'p ضرورية'، تعني ' أنه ليس من الصادق أن p اذن 'non-p » .

وعلى أساس تصور الإمكانية الذي قدمه لوكاشيفتش فإن قضايا الموجهات السابق وصفها هي قضايا صادقة ومتسقة. وحتى نبرهن على أن صيغة معينة هي تحصيل حاصل (مقررة) فإن لوكاشيفتش يستخدم طريقة القائمة بالإضافة إلى التعويض وقاعدة إثبات التالي. على سبيل المثال لكي نبرهن على الصيغة Cp Mp « إذا p صادقة إذن p ممكنة » نصمم القائمة ونضع في اعتبارنا القيم المتناظرة للتضمن والإمكانية.

p	Mp	CpMp
0	0	1
1/2	1	1
1	1	1

الصيغة CpMp هي تحصيل حاصل لأنها دائماً تأخذ القيمة 1 .

بناء على كل هذه الأفكار فإنه يمكن لنا أن نعرض النسق الذي يقدمه لوكاشيفتش للمنطق ثلاثي القيمة بصورة متسقة بحيث نقف على أهم مبائه وأفكاره الأساسية.

التركيب الأكسيوماتيكي للمنطق ثلاثي القيم.

يتألف البناء الأكسيوماتيكي للمنطق ثلاثي القيم عند لوكاشيفتش من أربعة أجزاء أساسية هي:

أولاً: الأفكار الابتدائية.

١ ـ المتغيرات القضائية p, q, r, ... وكل منها يأخذ ثلاث قيم هي صادق، كاذب، ممكن [M, F, T] وهذه القيم عددياً هي 1، 0، 1/2 على التوالي.

٢ ـ رابط التضمن Functor of Implication ويرمز له بالرمز C.

٣ ـ تصور الإمكانية ويعرف كما يلي:

D_2 MP = CNPP

ثانياً: الأفكار المعرفة Defined Idess.

توجد روابط أخرى تعرف كما يلي:

١ ـ الفصل المنطقي ويرمز له بالرمز A ويعرف كما يلي:

D_4 Apq = CCpqq

ب ـ الوصل المنطقي ويرمز له بالرمز K ويعرف كما يلي:

D_5 Kpq = NANpNq

حـ ـ التكافؤ المنطقي E ويعرف كما يلي:

D_6 Epq = KCpqCqp

ثالثاً : البديهيات

توجد لدينا في النسق أربع بديهيات أساسية هي :

١ - CqCpq

٢ - CCpqCCq Cpr

٣ - CCCpNppp

٤ - CCNqNpCpq

وقوائم الصدق الخاصة بهذه البديهيات تبين أن هذه البديهيات صادقة أو تحصيل حاصل إذا أخذت المتغيرات القيم 0 ، 1 . على التوالي.

الفصل الثاني عشر

هلبرت والصورية البحتة

حاول دافيد هلبرت تأصيل الصورية في المنطق الرياضي من خلال كتاباته [1] التي دونها، وأراد مثل فريجه ورسّل أن يؤسس ويدعم أسس الرياضيات Foundations of Mathematics عن طريق المنطق الرياضي،

---

(١) من أهم كتابات هلبرت ما يلي:

- Mathematische Probleme (Mathematical problems, congress of Mathematics, Paris, 1900).
- Ubre die Grundlagen der logik und der Arithmetik, On the Foundations of logic and Arithmatic, International Congress of Mathematics, Heidelberg, 1904).
- Axiomatische Deuken (Axiomatic thinking, Mathematische Annalen, 1918).
- Die Grundlagen der Mathematik, Hamburg, 1928.
- Beweis des Tertium non datur (The demonstration of Excluded Middle, Gottingen, 1931).
- Naturerkennen und logik (Knowledge of Nature and logic, Gottingen, 1931).

وكتب مع أكرمان Ackermann مؤلفا بالألمانية بعنوان Grundzuge der theoretische logik ترجم إلى اللغة الإنجليزية عام ١٩٥٠ بعنوان Principles of Mathematical logic كما صدر له بالاشتراك مع برنيز Bernays كتاب (أسس الرياضيات) Grundlagen der Mathematik الجزء الأول منه صدر عام ١٩٣٤ وصدر الجزء الثاني عام ١٩٣٨. ومن أهم مؤلفات هلبرت الأخرى (أسس الهندسة) Grundlagen der Geometrie الذي صدر عام ١٨٩٩، وترجم إلى الإنجليزية عام ١٩٠٢ بعنوان The Foundations of Geometry كما ترجم إلى اللغة الفرنسية أيضاً.

وهو ما أسماه المنطق النظري Theoretical logic أو الرياضي أحياناً.

ونقطة البدء عند هلبرت كما يلي: ليس مقصوداً بالمنطق أن يدرس موضوعات معينة، تماماً كما تفعل أي نظرية رياضية، ولكن المقصود به أن يدرس القضايا التي يمكن تدوينها عن هذه الموضوعات. وبكلمات أخرى فإن اللغة التي نستخدمها في النظرية الرياضية شيئاً قائماً بذاته، واللغة التي نستخدمها حين نتكلم عن هذه النظرية شيء آخر.

معنى هذا أن هلبرت ينظر للغة الرياضة كشيء مستقل ويردها إلى عناصرها حتى يمكن دراستها كلغة رياضية في حد ذاتها. وهذه الفكرة هي ما يطلق عليه هلبرت مصطلح، ما وراء الرياضيات، Meta-mathematics، وأحياناً، ما وراء المنطق، Metalogic. من أجل هذا الهدف شعر هلبرت بالحاجة إلى لغة دقيقة هي لغة المنطق الرياضي التي وجدها بصورة سلسة في برنكيبيا، وكل ما كان ينبغي عليه أن يفعله يتمثل في تبسيط هذه اللغة بصورة أكثر وتوسيعها لتفي بأغراض البرنامج الذي يدعو إليه. ووفقاً لهذا فإن على المنطقي في نظره أن يؤلِّف بين الرموز البحتة، وأن يضع هذه التأليفات تحت منظار الاستدلال دون أن يفكر فيما تعنيه، ودون أن يضفي الفكر عليها. وهنا فإن هلبرت ينظر للمنطق على أنه منطق قواعد Rules معينة، أو هو منطق علاقات، أو كما قال هو ذاته إن للرموز ناحيتين هما؛ (١) أنها تستخدم في القواعد الصورية Formal Rules، (٢) أنها بلا معنى ولها القدرة على الحركة.

ويرى هلبرت أن أي نظرية رياضية يمكن صياغتها بطريقة صورية تماماً، وأن الرياضيات متحررة تماماً من أي افتراضات قبلية. وحتى يمكن أن نؤسس الرياضيات فإننا لسنا بحاجة إلى معونة إلهية على ما يرى كرونكر [١]

(١) كرونكر من دعاة المذهب الحدسي في أسس الرياضيات، وهو معاصر لفيرشتراس =

Kronecker ، أو أي افتراض لذكاء إنساني خاص كما يدعي هنري بوانكاريه Poincaré ، أو أي حدس أوليّ كما يدعي بروور Brouwer ، أو حتى بديهيات قابلة للرد كما يرى رسّل وهوايتهد . إن هلبرت يعتقد في إمكانية إنجاز أسس الرياضيات بدون كل هذه الفروض إذا نظرنا للرياضة البحتة من وجهة نظر صورية خالصة، والطريقة الوحيدة التي يمكن بواسطتها إنجاز هذا العمل هي الطريقة الاكسيوماتيكية التي اتضحت في أبحاث هلبرت منذ حوالي عام

= Weierstrass وكان زميلاً له في جامعة برلين. وآراء كرونكر يمكن إيجازها فيما يلي:

١ - أن كرونكر يعترض على التحمس الزائد لدى بعض الرياضيين لتأسيس الرياضيات على أساس بعض المفاهيم مثل المجموعة المتناهية Finite set والأعداد الحقيقية Real Numbers بناء على فكرة اللامتناهي Infinite . ومع أنه يرى أن مدخل التحسيب Arithemetization هو المدخل الصحيح للتحليل والرياضيات، إلا أن أفكاره الأساسية فيما يتصل بالتحسيب تستبعد استخدام المجموعات اللامتناهية من التعريفات والأعداد، وفي هذا نجده يقول « لقد خلق الله الأعداد الصحيحة، ولكن ما عدا ذلك فهو من صميم عمل الإنسان ».

راجع في ذلك:

Bell, E.T., The Queen of the Sciences, Batimore, Williams and Wilkins, 1931, p. 34.

ب - يقرر كرونكر أن الأعداد الطبيعية والعمليات التي تقوم بينها إنما يمكن تأسيسها حدسيا، وأن الأعداد الجبرية والعمليات التي تقوم بينها يمكن تأسيسها من خلال الأعداد الطبيعية وعملياتها، لكن الأعداد الحقيقية ليست قابلة لمثل هذا التأسيس، ولهذا السبب نجده ينكر نظرية كانتور Cantor باعتبارها ليست نوعاً من الرياضيات وإنما هي فقط صورة من صور التصوف Mysticism . راجع في ذلك:

Struik, D.J., A Concise History of Mathematics, 2 Vols. New York, Dover Pub. 1948, p. 243.

جـ - كل التعريفات والبراهين في العلم الرياضي يجب أن تكون تركيبية Constructive .

د - أن الأحكام ذات الطبيعة المنطقية البحتة لا تفضي ضرورة الى نظريات رياضية مشروعة.

١٩٠٠ ، وهي تضع ذلك التمييز الدقيق بين التصورات الابتدائية المسموح بها بدون أي تعريفات، وبين التصورات المشتقة عن طريق التعريفات، أي بين البديهيات والمبرهنات، وهي أيضاً طريقة تؤسس قواعد الاستنباط في نظره (٣).

أما الطريقة الإكسيوماتيكية التي يدعو إليها هلبرت فهي جهاز من الرموز، لا شيء فيه يوجد بصورة عرضية، وإنما كل شيء يسير وفق القواعد الصورية الدقيقة. واختيار البديهيات Choice of Axioms في هذه الطريقة يخضع لثلاث اعتبارات أساسية هي:

أولا: أن البديهيات يجب أن تكون مستقلة Independent ، أو بمعنى آخر لا ينبغي أن يكون من الممكن استنباط بديهية من أخرى، لأنه في هذه الحالة سيزداد عدد البديهيات ويتطلب الأمر اختزالها إلى أقل عدد ممكن.

ثانيا: لا بد أن يكون عدد البديهيات كافياً بحيث يسمح باستنباط المبرهنات Theorems من النظرية التي لدينا.

ثالثا: يتعين أن تكون البديهيات غير متناقضة، وهذا الشرط يعد من أهم الشروط على الإطلاق في أي نسق بديهي Axiomatized system ، وهو أيضاً أصعب الشروط.

إلا أنه يمكننا أن ننظر إلى الشرط الثالث على أنه الخاصية التي ينبغي أن يتسم بها أي نسق استنباطي أو إكسيوماتيكي على الإطلاق، على حين أن

---

(٣) راجع في ذلك؛

a - Henkin, L., Suppes, P., and Tarski, A., The Axiomatie Method, Amesterdam, North-Holland pub. Co., 1959.

b - Helmer, O., On The Theory of axiom-system, Analysis, vol. 3, 1935, pp. 1-11.

الشرط الأول وكذلك الشرط الثاني، عادة ما ننظر إليهما على أنهما بمثابة شروط اقتصادية **Economical** بالنسبة للنسق.

ويترتب على هذه الشروط الثلاثة، ظهور مشكلات ثلاث أساسية تواجه أي نسق إكسيوماتيكي وهذه المشكلات هي:

١ - أن على النسق الإكسيوماتيكي أن يبرهن على عدم تناقض بديهياته.

٢ - كذلك لا بد وأن يكشف لنا النسق عن استقلال البديهيات.

٣ - وأن يبرهن على تمام **Completeness** البديهيات.

وانطلاقا من الحقيقة القائلة بأن الرياضيات تحوي تصورات منطقية بحتة، وأن المنطق يحتوي على تصورات رياضية (مثل فكرة العدد) فإنه لا يمكن تشييد المنطق بمعزل عن الرياضيات، كما أن الرياضيات لا يمكن أن تنفصل عن المنطق؛ لذا كان من الضروري أن يتم تأسيس المنطق والرياضيات، منذ البداية، في طريقة هلبرت بالتوازي معاً، وهذا ما افترضه هلبرت، ويمكن تلخيص طريقة هلبرت الإكسيوماتيكية التي اتبعتها المدرسة الصورية من بعده على النحو التالي:

(١) أن الرموز الأساسية في المنطق والرياضيات يمكن حصرها في رمزين هما:

أ - رمز السلب **Negation** ويرمز له هلبرت بالرمز —

ب - رمز التضمن **Implication** ويرمز له هلبرت بالرمز →.

(٢) أن كل التأليفات التي نتوصل إليها من الرموز التي نضعها في اعتبارنا، ولها معنى في الرياضيات الكلاسيكية، يمكن تمييزها بدقة حين نطلق عليها المصطلح «صيغ» **Formulae**: والصيغة يكون لها معنى فحسب في

حالتين: حينما تكون صادقة صدقاً مطلقاً، وحينما تكون كاذبة كذباً مطلقاً ويمكن أن نمثل لحالتي الصدق والكذب بمثال من الرياضيات المألوفة. إذا قلت ١ + ١ = ٢، هذه صيغة ذات معنى لأنها صادقة، وكذلك الصيغة ١ + ١ = ١ صيغة لها معنى أيضاً لأنها كاذبة، أما الصيغ التي ليست ذات معنى مثل 1 = → + 1 فهي لا تمثل شيئاً، ومن ثم لا يمكن القول بأنها صادقة أو كاذبة.

(٣) أن الإجراء الذي نقوم به ويسمح بنجاح هذه الصيغ، ويناظر الصيغ المبرهنة في الرياضيات الكلاسيكية، هو ما نسميه البرهان.

(٤) أن الصيغ التي تناظر اثباتات الرياضيات الكلاسيكية والتي يمكن تحقيقها في حدود المتناهي يمكن البرهنة عليها، أي يمكن تأسيسها - وفقط عندما يكون الحساب الفعلي للإثبات الرياضية المناظرة ينتج من صدق الضيغ الملائمة.

والواقع أن البرنامج الذي اقترحه هلبرت على النحو السابق يتضح منه أن النقاط الثلاث الأولى ترجع إلى رسّل ومدرسته. أما النقطة الرابعة والتي تعني أنه من الممكن إبدال الرموز المنطقية برموز أخرى حسابية (عن طريق الأعداد الطبيعية) تفضي بنا إلى قضايا حسابية Arithmetical Proposition (ذات أعداد طبيعية) صادقة، ومن ثم فإنه إذا كانت قضية رمزية يمكن أن ترد إلى 2 = 1، فإن هذا لا يمكن البرهنة عليه بذات الطريقة في ظل وجود النقطة الثالثة، وهذا يعني أنها غير قابلة للبرهان من خلال النسق وإطاره العام، أي البرهنة على عدم تناقض هذا النسق، لأن الأمر الهام بالنسبة لهلبرت هو عدم التناقض.

ولكن يمكن لنا أن نقوم بإجراء بعض التصحيحات للنقطة الثالثة بالذات عند هلبرت على الصورة التالية:

(٣ أ) بعض الصيغ المعينة تسمى بديهيات.

(٣ ب) إذا كانت b، a . صيغتين (صادقتين أو كاذبتين) وكان فيما يتعلق بالقضية a أن a→ أمكن البرهنة عليها، إذن فإن b أيضاً قابلة للبرهان (قاعدة إثبات التالي) ولكن لتقرير ما إذا كان من الممكن البرهنة على صيغة معطاة لدينا. مهما كانت هذه الصيغة ـ بطريقة عامة ومحدودة ـ فإن هذه مشكلة أكثر تعقيداً. وهي في حد ذاتها تؤلف موضوع ما نسميه « مشكلة القرار » Problem of decision . أضف إلى هذا أنه توجد البديهيات التي نجد لها تطبيقا في الرياضيات الكلاسيكية، وبطبيعة الحال يوجد عدد لا نهائي من هذه الصيغ، وكل صيغة يمكن أخذها كبديهية. كذلك فنحن إذا اعتبرنا أن كل رمز يمكن استبداله بعدد، فإنه ينتج عن ذلك أن هذه الصيغ يمكن تمثيلها بالتعبيرات ١ = ١، ٢ = ٢، ٣ = ٣، ... وهي تحصيلات حاصل، كما يرى فتجنشتين. ويمكن الحصول عليها بالتعويض من عدد محدود من الصيغ.

كذلك فإن مشكلة التناقض داخل النسق الرياضي الذي أراد هلبرت تأسيسه يمكن أن ترد إلى المشكلة الآتية: إذا كان لدينا النسق الرياضي S وهو نسق متناقض، فإنه سوف يتضمن برهاناً على الصيغة ١ = ٢، وهذا البرهان سوف يفضي إلى مجموعة متناهية من البديهيات، التي يمكن أن نشير إليها بالرمز M_0 وهذا سوف يعني بالضرورة أن المجموعة M_0 متناقضة، ومن ثم فإن مشكلة عدم التناقض الخاصة بالنسق ترد إلى مشكلة عدم تناقض بديهياته.

نظرية حساب القضايا في نسق هلبرت

تبدأ نظرية حساب القضايا عند هلبرت ـ وفق مذهبه الإكسيوماتيكي ـ متخذة مسار البرنكيبيا ولكن بإجراء بعض التعديلات الطفيفة على نسق البرنكيبيا كما يلي:

الأفكار الابتدائية Primitive Ideas

١ ـ X, Y, Z، ... متغيرات قضائية Propositional Variables يمكن أن تأخذ قيمتين (صادق، كاذب)

٢ ـ الفصل: ويرمز له بالرمز V

٣ ـ الوصل: ويرمز له بالرمز &

٤ ـ التضمن: ويرمز له بالرمز →.

٥ ـ التكافؤ: ويرمز له بالرمز ~

٦ ـ السلب: ويرمز له بالرمز ـــ

٧ ـ أنه إذا كانت X قضية فإن $\bar{X}$ نفيها.

البديهيات

يضع نسق هلبرت البديهيات الأربع التالية والتي تعد بمثابة قضايا صادقة أو هي تحصيل حاصل وهي:

a - $X \vee X \rightarrow X$

b - $X \rightarrow X \vee X$

c - $X \vee Y \rightarrow Y \vee X$

d - $(X \rightarrow Y) \rightarrow (Z \vee X \rightarrow Z \vee Y)$

قواعد الاستنباط

وتنحصر في:

أ ـ قاعدة التعويض

ب ـ قاعدة الاستنباط (إثبات التالي)

ويمكن البرهنة على النظريات باستخدام الأفكار الابتـدائيـة والقضـايـا الصادقة (البديهيات) عن طريق تطبيق قواعد الاستنباط. وهنا فإنه يتعين علينا أن نناقش هلبرت في نسقه.

أولا: أن نظرية هلبرت تبدأ من الأفكار الابتدائية وهي ذاتها الأفكار التي تبدأ منها نظرية رسِّل، فيما عدا الرموز التي استحدثها للمتغيرات، فقد وضع هلبرت الرموز X, Y، ... بدلا من p, q، ...، وكذلك رمز للوصل والتضمن والتكافؤ برموز جديدة، ورمز لنفي القضية بعلامة (ـــ) فوق المتغير ذاته.

ثانيا: أن البديهيات التي حددها هلبرت تستخدم التضمن والفصل على حين أن بديهيات رسِّل تستخدم فكرة السلب بالإضافة إلى التضمن والفصل.

ثالثا: أن القواعد الأساسية للاستنباط كما هي. لقد عدل هلبرت في شكل الرمزية، لكن لم يتمكن من إجراء تعديل على فكرة التضمن التي أودعها رسِّل وهوايتهد البرنكيبيا، وبذا فإن فكرة التضمن تظل كما هي الفكرة المحورية حتى في نسق هلبرت. لقد انصب التعديل إذن على الرمزية ولم يتجاوزها إلى النسق.

الفصل الثالث عشر

كواين وحركة تصحيح المفاهيم

لم تكن حركة تصحيح مفاهيم المنطق الرياضي في تقدمها أقل من محاولات ابتكار أنساق منطقية على غرار نسق برنكيبيا؛ ولذا وجدنا قلة من المناطقة يتجهون هذا الاتجاه، ومن بينهم، بـل مـن أهمهـم على الإطلاق كـوايـن [1] W.V.Quine الذي حاول أن يصحح المفاهيم المنطقية والرياضية من خلال تتبع تاريخي دقيق للأفكار، وكيفية استخدامها في الأنساق المختلفة. ومن ثم فإنه يتعين علينا أن نقف على مجهودات كواين في هذا المضمار.

لقد خصص كواين كتابه «مناهج المنطق» لبحث موضوعات شتى تتعلق بالمنطق الرياضي، ومن أهم الموضوعات التي تناولها في القسم الأول دالات الصدق؛ حيث عرض لهذه الدالات كما هي مستخدمة في المنطق الرياضي، خاصة نسق البرنكيبيا، وحاول أن يقدم من خلال هذا الاستعراض فكرته الدقيقة عن الدالات باعتبارها من المفاهيم الرئيسية.

---

(١) من أهم كتابات كواين:

- Mathematical logic, New york, 1940
- Elementary logic, Boston, 1941
- From a logical Point of view, Harvard, 1953
- Selected logical Papers, New york, 1966
- Methods of logic, London 1 st ed, 1950. Third ed. 1974.

وأول الدالات التي يتناولها كواين بالتصحيح دالة السلب. لقد اتضح له أن علامة السلب المستخدمة في برنكيبيا ماتيماتيكا وهي العلامة (~) لا تصلح للتطبيق إذا كانت لدينا متغيرات كثيرة في الدالة وأردنا تطبيق السلب عليها؛ ولذا فإنه كما يقول[1] يفضل العلامة (ـ) التي استخدمها تشارلز بيرس في رمزيته. فإذا كان لدينا المتغير p مثلا وأردنا التعبير عن سلبه، فإننا نكتب المتغير في صورته الجديدة السالبة كما يلي ($\bar{p}$). وإذا أردنا أن نعبر عن سلب السلب بالنسبة لذات المتغير فإن ذلك يكون بكتابة المتغير على النحو ($\bar{\bar{p}}$)، وهذا هو سلب السلب الذي يكافىء المتغير p منطقياً.

ومن جانب آخر فان التعبير بطريقة كواين عن دالة الوصل يمكننا من اختصار الثوابت المستخدمة في برنكيبيا. فاذا كان لدينا المتغيرات r, q, p مثلا، فإنه يمكننا التعبير عن صدقها جميعاً في دالة وصل واحدة حين نضع المتغيرات وضعاً متجاوراً في الصيغة (pqr). ويستنتج كواين قانون صدق هذه الدالة كما يلي « تصدق الدالة فقط وفقط إذا صدقت جميع القضايا الموجودة في الدالة. وتكذب الدالة فقط وفقط إذ كانت قضية واحدة من هذه القضايا على الأقل كاذبة».

ومن هذه الصورة يتوصل كواين إلى أن الوصل بين القضية ونفسها يكافىء القضية ذاتها أي أنه يمكننا اختصار الصيغة.

(pp)

وفقط إلى الصيغة

p

أما دالة الفصل فإن كواين يجد أنه من الأفضل معالجتها بصورة أدق مما عرضه نسق برنكيبيا، لأن الفصل يقع على الأقل في معنيين:

(١) Ibid, P. 14

١ ـ الفصل الاستبعادي exclusive disjunction وهو ذلك الذي يستبعد صدق القضيتين معاً إلى جانب استبعاده كذبهما معاً؛

٢ ـ الفصل غير الاستبعادي non exclusive disjunction وهو الذي يقرر صدق القضيتين معاً، ولكنه يستبعد كذبهما معاً.

خذ المثال الآتي ليوضح ما يعنيه كواين بدالة الفصل «الجنود منتصرون أو الجيش متقدم»، لهذه القضية أربعة احتمالات وهي:

الحالة الاولى:	الجنود منتصرون	والجيش متقدم
الحالة الثانية:	الجنود ليسوا منتصرين	والجيش متقدم
الحالة الثالثة:	الجنود منتصرون	والجيش ليس متقدماً
الحالة الرابعة:	الجنود ليسوا منتصرين	والجيش ليس متقدماً

إنه وفقاً لرأي كواين فإننا استخدمنا الفصل بالمعنى الاستبعادي ونجد أن الدالة تكذب في الحالة الأولى «الجنود منتصرون والجيش متقدم» وفي الحالة الرابعة «الجنود ليسوا منتصرين والجيش ليس متقدماً». كما أن الدالة تكون صادقة في الحالة الثانية «الجنود ليسوا منتصرين والجيش متقدم»، وفي الحالة الثالثة «الجنود منتصرين والجيش ليس متقدماً». أما إذا استخدمنا الفصل بالمعنى غير الاستبعادي فسوف نجد أن الحالة الرابعة وهي «الجنود ليسوا منتصرين والجيش ليس متقدماً» هي الحالة الوحيدة التي تكذب فيها دالة الفصل، على حين أن الدالة وفقاً للتعريف السابق سوف تصدق في الحالات الثلاث الأولى.

لذلك فإن كواين يفضل استخدام دالة الفصل بالمعنى غير الاستبعادي، وهو نفس المعنى الذي استخدم في البرنكيبيا. فإذا كان لدينا المتغير p والمتغير q وأردنا أن نعبر عن الفصل الاستبعادي لهما، فإن ذلك يكون من خلال الصيغة:

$(p\ \bar{q}\ v\ \bar{p}\ q)$

على هذا الأساس فإن دالة الفصل تصدق إذا صدقت واحدة على الأقل من قضاياها.

ويضع كواين العلاقة بين الوصل والفصل والسلب بصورة محددة فنجده يميز بين بعض الصيغ التي تبدو متشابهة وهي:

1. $(\bar{p}\ q)$	and	$-\ (pq)$
2. $(\bar{p}\ v\ q)$	and	$-\ (p\ v\ q)$
3. $-\ (pq)$	and	$(\bar{p}\ \bar{q})$
2. $-\ (p\ v\ q)$	and	$(\bar{p}\ v\ \bar{q})$

فقد يبدو لنا في كثير من الأحيان أن هذه الصيغ متشابهة، لكن واقع الأمر أن ثمة اختلافات بيّنة تبدو من وضع الصيغ ذاتها. على سبيل المثال نحن نجد أن الحالة الأولى التي تقرر تمييز الصيغ $(\bar{p}\ q)$ نجد أن p فقط هي التي سلبت ، على حين أن الحالة المقابلة ـ (pq) تبين أن السلب يطبق على ما بداخل الأقواس ككل. كما ويتضح هذا الاختلاف من قراءة كل صيغة على حدة. فالصيغة $(\bar{p}\ q)$ تقرأ «ليست هي الحالة أن p وهي الحالة أن q». أما الصيغة المقابلة فتقرأ «ليست هي الحالة أن كلا من p ‘ q».

ويوضح كواين بناء على ما أشار إليه من معاني السلب والوصل والفصل أن القضية $\bar{p}$ تكون صادقة فقط إذا كانت p كاذبة، وأن ‘p q... s’ تصدق فقط إذا كانت s,..q,p صادقة كل على حدة، وأن ‘pvqv....vs’ تصدق إذا لم تكن p‘q‘....s‘ كاذبة جميعاً. وهذا يعني أن صدق أو كذب دالات السلب والوصل والفصل يتوقف على صدق أو كذب القضايا المكونة لها، ومن ثم فهو يعرف الدالة على أنها أي «مركب من جمل إخبارية يتوقف صدقها في كل الحالات على قيم الصدق لأجزائها المكونة لها؛ ومن ثم تصبح دالة

صدق »[1]. وحتى يبين كواين أهمية هذا التعريف، فإنه يزودنا بمثال يكشف عن تعريفه بصورة دقيقة. فإذا كان لدينا المركب الإخباري « مات جونز لأنه تناول سمكاً بالآيس كريم ». في هذا المثال نجد لدينا الحالة « مات جونز »، والحالة « جونز تناول سمكاً بالآيس كريم »، فنحن هنا إذا سلمنا بالحالتين كل على حده أمكننا أن ننكر صدق القضية المركبة والمؤلفة لها حيث صدق المركب يتوقف على صدق الأجزاء المؤلفة للمركب. لكن إذا كانت لدينا الحالات:

(١) أكل جونز سمكاً بالآيس كريم ومات.	(وصل)
(٢) أكل جونز سمكاً بالآيس كريم أو مات.	(فصل)
(٣) لم يمت جونز.	(نفي)

فإنه لا يمكن إنكار صدق أو كذب المركب ما دمنا قد عرفنا صدق أو كذب أجزاء المركب. وعلى هذا الأساس فإنه يمكن التعبير عن دالة الصدق truth - Function عن طريق استخدام قائمة تبين حالات الصدق والكذب المتعلقة بكل حالة من حالات صدق أو كذب المتغيرات التي تربط بينها الدالة.

والسؤال الذي يفرض نفسه الآن: هل تكفي دالة السلب والوصل والفصل وحدها لتأسيس دوال الصدق؟ إن كواين يرى ذلك؛ بل إنه يذهب إلى ما هو أبعد حين يقرر أن دالة السلب والوصل وحدهما تكفيان لهذا الغرض بدون الاستعانة بدالة الفصل، ويقدم لنا المثال الآتي:

(p excl - or q)

تكذب هذه الدالة في حالتين، وتصدق في حالتين:

---

(١) Quine, W.V., **Methods of logic**, p. 15.

١ ـ **حالتي الكذب**

ـ تكذب الدالة إذا كانت p صادقة، q صادقة.

ـ تكذب الدالة إذا كانت p كاذبة، q كاذبة.

٢ ـ **حالتي الصدق**

ـ تصدق الدالة إذا كانت p كاذبة، q صادقة.

ـ تصدق الدالة إذا كانت p صادقة، q كاذبة.

ومن ثم فانه يمكن التعبير عن الصيغة [١] (p excl - or q) بالصيغة:

$$- (pq) - (\bar{p}\ \bar{q})$$

التي تعبر عن الوصل بين (pq) ـ و ($\bar{p}\ \bar{q}$). ذلك لأن هذا الوصل ينكر (p q) ، ($\bar{p}\ \bar{q}$). وعلى هذا الأساس يخلص كواين إلى النتيجة القائلة بأن (p excl - or q) تكون كاذبة في حالتين حينما تكون ($\bar{p}\ \bar{q}$) - (pq) - صادقة. وهنا تكون فكرة كواين صحيحة حيث الوصل والسلب وحدهما يكفيان، نظراً لأن دالة الفصل الاستبعادي تكون زائدة [٢].

كذلك يثبت كواين أن دالة الفصل غير الاستبعادي زائدة، وينطبق عليها ما ينطبق على الفصل الاستبعادي، حيث الصيغة (p v q) تكون كاذبة إذا كانت p ، q كاذبتين، ومن ثم فإنها تصدق إذا لم يكذبا معاً، أي حين نعبر عنها بالصيغة ($\bar{p}\ \bar{q}$) ـ.

ويحاول كواين أن يشرح فكرته بدقة من خلال مثال يفترض فيه بعض التعقيد. افترض دالة صدق للمتغيرات p ، q ، r. وهذه الدالة تصدق في خمس حالات، وتكذب في ثلاث حالات.

---

(١) Ibid, p. 16

(٢) Ibid, p. 16

حالات الصدق

1.	p False	q true	r true
2.	p true	q False	r true
3.	p true	q true	r False
4.	p False	q true	r False
5.	p False	q False	r False

حالات الكذب

1.	p true	q true	r true
2.	p False	q False	r true
3.	p true	q False	r False

والدالة في حالات الكذب الثلاثة الأخيرة يتم التعبير عنها كما يلي:

١ - $(p\ q\ r)$

٢ - $(\bar{p}\ \bar{q}\ r)$

٣ - $(p\ \bar{q}\ \bar{r})$

وحتى نعبر عن الدالة في وصل واحد ، فإن سلب هذه الدالات الثلاث يتم في الوصل الآتي:

$$-(p\ q\ r) - (\bar{p}\ \bar{q}\ r) - (p\ \bar{q}\ \bar{r})$$

ويلاحظ أن هذا الإجراء يمكن تطبيقه على أي مركب حيث نقوم بعمل وصل لسلب كل الحالات التي تكذب فيها الدالة. ويوضح كواين أن الاستثناء الوحيد لهذا الاجراء يكمن في الصيغ التحليلية. فإذا كان لدينا مركب من القضايا p ، q ، r ، s . وهذا المركب على هيئة صيغة تحليلية ، فإننا

نستطيع أن نعبر عن هذا المركب في صيغة وصل وسلب واحدة كما يلي:

$$- (p\ \bar{p}\ q\ r\ s)$$

حيث $(p\ \bar{p})$ كاذبة دائماً.

من هنا يستنتج كواين أن السلب والوصل يكفيان وحدهما فقط للتعبير عن الدالات المنطقية. ولكن هذه الفكرة لا تستبعد بحال من الأحوال فكرة الفصل، لأن الوصل (pq) يمكن إحلال الفصل $(\bar{p} \vee \bar{q})$ ـ بدلا منه. ولما تنبه كواين إلى هذه الفكرة[٦] حاول أن يستخدم ثابت عدم الاتساق (/) الذي أشار إليه شيفر Sheffer عام ١٩١٣، حيث الصيغة (p / q) تصدق فقط إذا لم تكن q,p صادقتين معاً: ومن ثم فإن الصيغة (p / q) تكافىء الصيغة $-(pq)$. كما أن الصيغة $(\bar{p})$ يمكن التعبير عنها بالصيغة البديلة (p/p) وتعني أن p ليست متسقة مع نفسها. وكذلك الصيغة $(p\ q)$ يعبر عنها بالصيغة البديلة الآتية: $(p/q) / (p/q)$.

يتضح لنا إذن أن ثمة تطوراً حدث في مفهوم السلب والوصل والفصل عند كواين، وقد استتبع هذا تطورات أخرى حدثت في مجال مفهوم التضمن. وقد سبق أن أشرنا ونحن بصدد استعراض مجهودات لويس في تناول فكرة التضمن، أن المناطقة ينظرون إلى هذه الفكرة باعتبارها محورية في أي نسق منطقي، لهذا فإن كواين تناول فكرة التضمن مرة أخرى حتى يبين مدى اتساق الأفكار التي ذهب اليها، وهذا التناول يستند إلى فكرة لويس أيضاً المستمدة من رسل حيث يقام التمييز بين التضمن المادي والتضمن الصوري. فإذا كانت لدينا الصيغة $(p \supset q)$ فإن هذه الصيغة تعبر عن دالة شرطية حيث p مقدم antecedent، q تال Consequent

---

(١) Ibid, p. 18.

والشرط هنا يكمن في أنه (إذا ... إذن ...) . لقد أوضح المناطقة قبل كواين أن صورة هذه الدالة تثبت الشرط؛ إلا أن كواين يرى أن إثبات الدالة الشرطية يعد بمثابة إثبات شرطي للنتيجة التي تنطوي عليها أكثر من كونها إثباتاً للشرط نفسه [١].

واتساقاً مع المبادىء المعروضة في برنكيبيا ماتياتيكا يرى كواين أن لهذه الدالة ثلاث حالات للصدق وحالة واحدة للكذب:

حالات الصدق:

(١) حالة صدق المقدم وصدق التالي معا
(٢) حالة كذب المقدم وصدق التالي
(٣) حالة كذب المقدم وكذب التالي

حالات الكذب:

(١) حالة صدق المقدم وكذب التالي:

ولكنه مع هذا يشير إلى أن هذه الدالة زائدة ويمكن الاستغناء عنها باستخدام أحد صيغتين [٢]:

الصيغة الأولى: وتتمثل في استخدام السلب والوصل مثل $\overline{(p\,\bar{q})}$.

الصيغة الثانية: وتتمثل في استخدام السلب والفصل مثل $(\bar{p} \vee q)$.

ولكن يبدو أن كواين قد غابت عنه نقطة هامة، ذلك أن نسق برنكيبيا يحدد بصورة دقيقة تعريف التضمن بدلالة السلب والفصل من جهة، ثم تعريفه مرة أخرى بدلالة السلب والوصل من جهة أخرى، وهذا ما يبدو لنا

(١) Ibid, p. 19.
(٢) Ibid, pp. 19-20

بوضوح من تعريف البرنكيبيا للتضمن كما يلي:

$$p \supset q = \sim p \vee q \qquad df$$
$$= \sim (p \,.\, \sim q) \qquad df$$

ومن ثم فإن الاختلاف الوحيد بين كواين والبرنكيبيا في وضع هذه الدالة يكمن في مسألة التجاور بين المتغيرات وعلامة السلب الجديدة، إلى جانب هذا فإنه لا يمكن لنا الأخذ بفكرة كواين في الاستغناء عن دالة التضمن واستخدام بدائلها، ذلك لأننا داخل نظرية البرهان حين نأخذ في البرهنة على نظرية من النظريات كتلك المعروضة في البرنكيبيا إنما نستند إلى قاعدة التعويض الذي يعني استخدام البدائل طالما أن البرهان يتطلب ذلك.

إلا أن الجديد في فكرة كواين عن الشرط هو تمييزه الدقيق بين أربعة أنواع من الشرط هي: (١) الشرط العام (٢) الشرط المادي (٣) الشرط غير الحقيقي (٤) الشرط المزدوج. أما النوع الأول وهو الشرط العام فإن كواين يقدم لنا المثال التالي: «إذا كان شيء ما حيواناً فقرياً، إذن فله قلب» هذا المثال عبارة عن مجموعة اشتراطات يصح التعبير عنها كما يلي:

«في كل قيم x فإنه إذا كان x حيواناً فقاريا، إذن x له قلب».

أما الشرط المادي، أو النوع الثاني الذي يشير إليه كواين، فهو ذلك النوع المألوف لدينا حيث يقوم بين قضيتين «إذا كان p إذن q»، أو بمعنى آخر $(p \supset q)$.

ويحاول كواين بعد ذلك أن يحدد النوع الثالث من الشرط وهو الذي يشير إليه بالشرط غير الحقيقي أي الذي يكون مقدمه كاذباً ونتيجته كاذبة [1] مثل «إذا كان ايزنهاور قد جرى، لكان ترومان قد خسر».

(١) Ibid, p. 20

يوضح كواين أن معالجة مثل هذا النوع من الشرطيات يرتبط بالعلية والعلاقة النوعية بين مادة المقدم ومادة التالي؛ أو بمعنى آخر فإن هذا الموضوع أقرب إلى المنطق المادي منه إلى المنطق الرياضي؛ ولكنه في نفس الوقت يوضح مدى الخلط الذي تعاني منه فكرة الدالة الشرطية، ولذا يرى أن الفكرة لا تنتمي للمنطق البحت بقدر انتمائها لنظرية المعنى Theory of meaning أو ربما فلسفة العلوم (١).

وإنطلاقاً من فكرة الشرط العام والشرط غير الحقيقي التي حددها كواين، يمكن تمييز الشرط المادي عنها. فالشرط المادي كما يرى يقوم بذاته بين القضيتين ويقدم كواين الأمثلة التالية لتوضيح فكرته الأساسية:

المثال الأول: إذا كانت فرنسا في أوربا إذن لكان البحر مالحاً.

المثال الثاني: إذا كانت فرنسا في استراليا إذن لكان البحر مالحاً.

المثال الثالث: إذا كانت فرنسا في استراليا إذن لكان البحر عذباً.

الشرط في هذه الأمثلة الثلاثة لا معنى له، كما يرى كواين؛ لأن صورة الشرط الأساسية تؤسس علاقة بين وقائع لا رابطة بينها. أضف إلى هذا أنه إذا أردنا إثبات أن فرنسا تقع في أوربا فليس هناك ما يدعو إلى استخدام اشتراطات بين قضايا نعلم صدقها وكذبها، لكن الشرط الحقيقي يقوم بين قضايا نحن لسنا متأكدون من صدقها أو كذبها كل على حدة.

أما النوع الرابع من الشرط فهو ما يسميه كواين بالشرط المزدوج، وهو عبارة عن شرط مادي مزدوج، حيث يكون على صورة وصل بين شرطين مثل:

---

(١) Ibid, p. 21

$$(p \supset q) . (q \supset p)$$

وهو يعني « p إذا وإذا فقط q » وهـذا النـوع مـن الشرط يعبر عنـه نسـق برنكيبيا بالتكافؤ الآتي ($p \equiv q$) أي أن:

$$p \equiv q = (p \supset q) . (q \supset p)$$

ولهذا النوع من الشرط ، كما نعلم، حالتان للصدق وحالتان للكذب.

حالتا الصدق:

١ ـ إذا كانت p صادقة ، q صادقة.
٢ ـ إذا كانت p كاذبة ، q كاذبة.

حالتا الكذب:

١ ـ إذا كانت p صادقة ، q كاذبة
٢ ـ إذا كانت p كاذبة ، q صادقة.

وحين تناول كواين هذا النوع من الشرط حاول أن يثبت أن صيغة التكافؤ ($\equiv$) زائدة ـ كما فعل في حالة الفصل والتضمن ـ وذلك عن طريق استخدام صيغة بديلـة هـي السلـب والوصـل، حيـث بـدلا مـن الصيغـة ($p \equiv q$) يمكن استخدام الصيغة البديلة ($q\bar{p}$) ـ ($p\bar{q}$) ـ.

لقد وجد كواين أن الافكار والمفاهيم الجديدة التي قدمها يمكن أن تكون ذات فائدة عملية أكثر مما هو في الأنساق المنطقية الأخرى. فأضاف إلى هذه المفاهيم بعض التحليلات الجديدة، خاصة تلك التي تتعلق بقوائم الصدق، ثم حاول بعد ذلك أن يصحح بعض المفاهيم التي لدينا عن الإتساق والصحة المنطقية. ويمكن أن نتبين هذه التعديلات فيما يلي:

أولا ـ قوائم الصدق والتحليل

يشير كواين إلى أن منهج القدماء في تحليل الصيغ المنطقية يستند بالضرورة إلى استخدام قوائم الصدق « وهذا ما نجده عن فتجنشتين ولوكاشيفتش وبوست وغيرهم »؛ حيث توضع الصيغة المنطقية في قائمة صدق، وتوضع القيم تحت المتغيرات، ثم نقوم بإيجاد العلاقات بين المتغيرات من خلال تطبيق معنى الثوابت المنطقية. لكن كواين يرى أن هذا المنهج يتطلب منا تحليل القائمة حتى نكتشف مواضع الكذب في الصيغة، وهذا يعني بالضرورة أنه إذا كانت لدينا بعض الصيغ التي تحتوي على خمس متغيرات أو أكثر مثلا، فإن تحليلها يتطلب مزيداً من الدقة والجهد، إلى جانب الخطأ الذي قد تقع فيه. الأمر الذي يتطلب منا البحث عن وسيلة مثلى للتحليل، وهو ما يحاول كواين عرضه بصورة جديدة يختلف فيها مع المناطقة.

١ ـ يرى كواين أنه ليست بنا حاجة لاستخدام الرمزين F, T للإشارة إلى مفهومي « صادق وكاذب »، وإنما يمكننا فقط استخدام رمزٍ واحدٍ في وضعين وهو الرمز T فإذا كان الرمز T في هذا الوضع، فإنه يشير إلى « صادق »، وإذا كان في هذا الوضع T فإنه يشير إلى « كاذب ».

٢ ـ لا يرى كواين ضرورة ملحة لتحليل الصيغة المنطقية بأسرها؛ كما يفعل السابقون، ولكنه يختار من بين المتغيرات التي لديه متغيراً ما ويفترض صدقه مرة وكذبه مرة أخرى، ثم يستنتج النتائج المترتبة على ذلك. فإذا ما تبين أن المتغير الذي اختاره صادقاً، افترض صدق أو كذب ثابت آخر، وهكذا حتى يتوصل إلى القيم النهائية للدالة.

٣ ـ إذا كان لدينا الوصل (TTT) فإنه يمكن اختصاره إلى (TT) ثم إلى (T) فقط.

٤ ـ إذا كان لدينا الفصل (⊥ V ⊥ V ⊥) فإنه يمكن حذف (⊥) بصورة تدريجية من هذا الفصل حتى نصل إلى (⊥).

٥ ـ إذا كان لدينا صيغة وصل تحوي ⊥ فانه يمكن اختصار هذا الفصل إلى T.

٦ ـ إذا كان لدينا صيغة فصل تحوي ⊥ فانه يمكن اختصار هذا الفصل إلى T.

٧ ـ إذا كان لدينا صيغة شرط المقدم فيها T فاننا نختصر هذا الشرط إلى التالي دون المقدم.

٨ ـ إذا كان لدينا صيغة شرط المقدم فيها ⊥ أو صيغة شرط تاليها T فإننا نختصره إلى T.

٩ ـ إذا كان لدينا صيغة شرط تاليها ⊥ فانه يمكننا اختصار الدالة إلى نفي المقدم.

١٠ ـ إذا كان لدينا شرط مزدوج فإننا نختصر منه T، وتصبح الصيغة T ≡ T هي T، وتصبح الصيغة T ≡ T هي ⊥.

١١ ـ نقوم بحذف ⊥ في الشرط المزدوج ونسلب الجزء الآخر حتى يمكن اختصار الدالة إلى هذا السلب.

إذن وفق هذا المنهج الجديد الذي يحدده كواين يمكننا إجراء التحليل على أي صيغة من الصيغ، وهذا ما يتضح لنا من تحليل الصيغة الآتية:

$$`p\ q \vee \bar{p}\ \bar{r} \,.\supset.\, q \equiv r'$$

نبدأ بتحليل هذه الصيغة كما يلي:

$$p q \vee \bar{p} \bar{r} . \supset . q \equiv r$$

نضع ⊥ مكان P

$\bot q \vee T \ \bar{r} . \supset . q \equiv r$

باستخدام (٣، ٥) $T \ \vee \bar{r} . \supset . q \equiv r$

باستخدام (٤) $\bar{r} . \subset . q \equiv r$

نضع T مكان r

$\bot \supset . q \equiv T$

T باستخدام القاعدة (٨)

نضع ⊥ مكان r

$T \supset . q \equiv \bot$

$\bot \equiv q$ باستخدام القاعدة (٧)

$\bar{q}$ باستخدام القاعدة (١١)

⊥ T

نضع T مكان P

(1) $T q \vee \bot \bar{r} . \supset . q \equiv r$

(2) $q \vee \bot \bar{r} . \supset . q \equiv r$ باستخدام القاعدة ٣

(3) $q' \vee \bot . \supset . q \equiv r$ باستخدام القاعدة ٥

(4) $q \supset . q \equiv r$ باستخدام القاعدة ٦

نضع T مكان q

$\bot \supset . \bot \equiv r$

T باستخدام القاعدة (٨)

نضع ⊥ مكان q

$T \supset . T \equiv r$

(1) $T \equiv r$ باستخدام القاعدة ٧

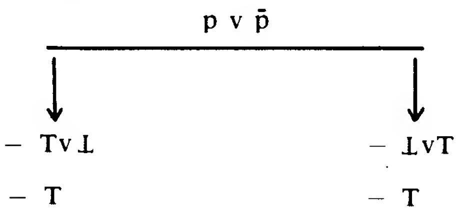
(2) r باستخدام القاعدة ١٠

T ⊥

على هذا النحو يكشف كواين عن مفهومه الجديد لتحليل الصيغ دون الاستعانة بقوائم الصدق. وبطبيعة الحال فإن فكرة كواين جديرة بالاعتبار خاصة إذا كانت لدينا متغيرات متعددة داخل الصيغة المطلوب تحليلها. هذا إلى جانب أن الفكرة في حد ذاتها تقتضي معالجات دقيقة من جانب المناطقة للكشف عن التطورات التي يمكن أن تحدثها في هذا الجانب.

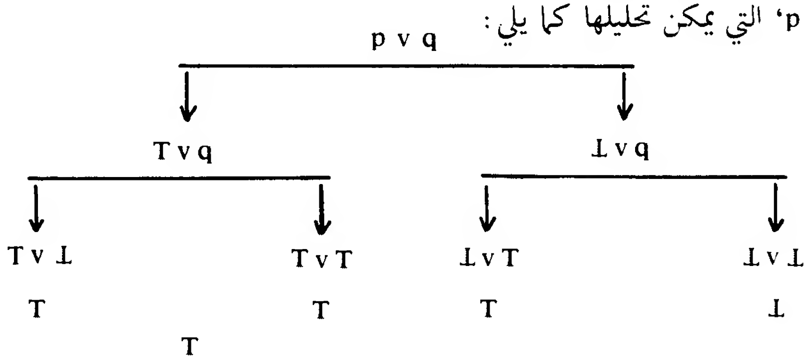
ثانيا: الاتساق والصحة المنطقية

لقد وجد كواين أن موضوعي الإتساق والصحة المنطقة للصيغ لا بد من معالجته بصورة منطقية أفضل من تلك المعالجة التي درج عليها المناطقة، ولهذا فهو ينظر للصيغة الصحيحة منطقياً Valid Schema على أنها الصيغة التي تكون صادقة مهما صدقت أو كذبت المتغيرات التي بها. فعلى سبيل المثال الصيغة $q \vee \bar{q}$. تعد صحيحة منطقياً لأننا إذا أخذنا في تطبيق المنهج التحليلي لقيم الصدق حصلنا على النتيجة.



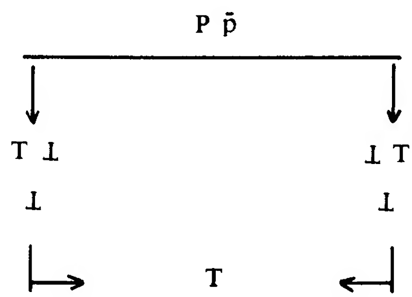
T (صادق في جميع الحالات)

أما الصيغة المتسقة منطقياً Consistent Schema فهي تلك الصيغة التي تصدق في بعض الحالات التي تكون عليها متغيراتها، ومثال هذه الصيغة 'p v q' التي يمكن تحليلها كما يلي:



في هذه الدالة نجد أن التحليل النهائي قد أفضى بنا إلى حالة كذب واحدة وثلاث حالات للصدق، ومن ثم تعتبر هذه الصيغة من الصيغ المتسقة.

كذلك يعالج كواين الصيغ غير المتسقة **Inconsistant schema** التي تكذب في كل الحالات التي تكون عليها متغيراتها. ومن أمثلة الصيغ غير المتسقة الصيغة «p p̄» التي يمكن تحليلها كما يلي:



يتبين لنا من هذا التحليل أنه ليس ثمة حالات تصدق فيها مثل هذه الصيغة:

على هذا النحو يكون كواين قد عالج ثلاثة أنواع مستقلة من الصيغ هي:

(١) الصيغة الصحيحة منطقياً.

(٢) الصيغة المتسقة منطقياً.

(٣) الصيغة غير المتسقة منطقياً. ومن خلال المقارنات بين هذه الصيغ المختلفة يمكن لنا اثبات النتائج الآتية:

١ ـ أن الصيغة الصحيحة منطقياً هي في حد ذاتها نقيض الصيغة غير المتسقة منطقياً، والعكس صحيح، حيث الصيغة غير المتسقة منطقياً هي نقيض الصيغة الصحيحة. على حين أن الصيغة المتسقة منطقياً نقيضها صيغة غير متسقة منطقياً.

٢ ـ أن اختبار صحة أي دالة من الممكن أن يتوقف في أي مرحلة دون أن نصل إلى نهاية التحليل، وذلك بمجرد أن نحصل على نتيجة سلبية واحدة. فإذا حصلنا على تأليف من قيم المتغيرات نجد الصيغة فيه كاذبة (حالة كذب

الثابت الرئيسي فيها) فإن نتيجة التحليل تصبح سلبية .

٣ - أن الإجراء السابق ينسحب على عدم الإتساق ، لأنه من الممكن أن نتوقف عن المضي في التحليل بمجرد الحصول على حالة واحدة تصدق فيها الصيغة .

٤ - في حالة اختبار الاتساق لا نصل إلى نتيجة سلبية قبل نهاية التحليل بأي حال من الأحوال ، إلا أننا قد نتوقف عن التحليل عندما نحصل على حالتين على الأقل واحدة منها تصدق فيها الصيغة والأخرى تكذب فيها ، ومن ثم فإن نتيجة التحليل تكون إيجابية ولا داعي للمضي حتى نهاية التحليل ، وهذا ما نتبينه من الصيغة التالية :

$$p\,q \vee \bar{q}\,\bar{r} \,.\supset.\, q \equiv r$$

$$\downarrow$$

$$T\,q \vee \bot\,\bar{r} \,.\supset.\, q \equiv r$$

$$q \vee \bot \,.\supset.\, q \equiv r$$

$$\downarrow$$

$$T \vee \bot \,.\supset.\, T \supset r$$

$$T \supset r$$

$$r$$

$$T \qquad \bot$$

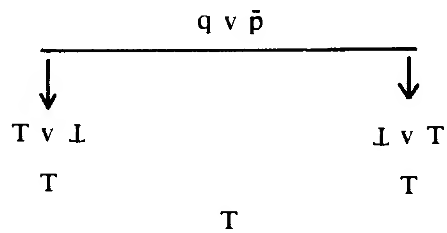
يتبين إذن من هذا التحليل أن الدالة متسقة وليس ثمة ضرورة للمضي في التحليل إلى ما هو أبعد من هذا .

٥ - تفيد الصيغ الصحيحة منطقياً في أنها تصدق في جميع الحالات المتعلقة بالمتغيرات التي تتكون منها ، ولكن إذا فحصنا هذه الصيغ أو بعض أمثلتها لوجدناها مجرد تحصيل حاصل . على سبيل المثال الصيغة «$p \supset p$» صيغة تحليلية وهي لا تقول لنا شيئاً ؛ وهو ما يمكن أن نتبينه من المثال المادي الآتي :

« إذا زحف الجنود إذن فقد زحف الجنود »

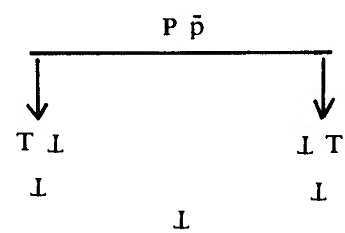
هذا المثال لا يوضح لنا حقيقة هل زحف الجنود أم لا؟، ولهذا فإن كواين[١] يقرر أن أهمية الصيغة الصحيحة منطقياً ليست في كونها نتيجة مطلوب التوصل إليها، وإنما في كونها وسيلة لاختصار قيم الصدق.

٦ - أنه يمكن لنا الاستفادة من الصيغ الصحيحة والصيغ غير المتسقة في اختصار عملية التحليل ذاتها على اعتبار أن الصيغة الصحيحة يمكن أن ترفع إذا كانت تشكل جزءاً من صيغة أخرى ويوضع بدلا منها T . مثال ذلك:



من هذا التحليل يتضح أن الصيغة يمكن رفعها ووضع «T» بدلا منها، فإذا قابلتنا هذه الصيغة كجزء من أي صيغة أخرى أمكن القيام بهذا الاجراء، وهذا هو جوهر الاختصار الذي يدعو له كواين.

كذلك للصيغة «p p̄» يمكن رفعها ووضع «T» بدلا منها وهو ما يتبين من التحليل الآتي:



ويمكن اتباع هذا في أي صيغة غير متسقة. لكن الصيغة المتسقة لا يصح

(١) Ibid, pp. 36 - 37.

فيها مثل هذا الإجراء . ولكن من أجل استكمال غاية التنظيم يمكن تحديد فئة الصيغ الصحيحة التي يمكن رفعها ووضع T مكانها ؛ وهو ما نجده في الحالات الآتية :

- حالة الفصل بين أي متغيرات أو صيغ على أن يشتمل هذا الفصل على أي قضية ونقيضها ، أو أي صيغة ونقيضها مثل :

$p\ q \vee q\ r \vee s\ \bar{p} \vee -(p\ q)$, «$p \vee q \vee r \vee \bar{p}$»

- حالة الشرط أو الشرط المزدوج (التكافؤ) الذي نجد عنصريه متماثلين مثل :

"$s\bar{s} \equiv s\bar{s}$", "$qr \equiv qr$", "$qrvqs\ .\supset .\ qrvqs$"

أما الصيغ غير المتسقة التي يمكن رفعها ووضع « ⊥ » بدلا منها ، فإنه يمكن تحديدها أيضاً كما يلي :

- الوصل بين أي متغيرات أو قضية ونقيضها مثل :

$pvq\ .\ svr\ .\ pvs\ .-(pvq)$, «$pqr\bar{p}$»

- حالة الشرط المزدوج بين قضية أو صيغة ونقيضها مثل :

"$qr \equiv -(qr)$" ، "$p \equiv \bar{p}$"

٧ - وهناك خاصية أخرى تتعلق بالصيغتين الصحيحة وغير المتسقة فقط وهذه الخاصية هي ما يطلق عليه كواين [١] صيغة استبدال حرف بصيغة Substitution of Schemata for letters ، وهي تصدق في حالة الصيغ الصحيحة والصيغ غير المتسقة ولا تصدق في حالة الصيغ المتسقة . وهذه الخاصية تعني استبدال حرف من حروف (أي متغيرات) أي صيغة صحيحة أو

---

(١) Quine. W - V., Ibid, p. 38.

غير متسقة بأي صيغة كانت. ويمكن أن نحدد بعض الأمثلة التطبيقية على هذه الخاصية كما يلي:

- إذا قلنا أن الصيغة 'p v p̄' صيغة صحيحة فإنه يمكننا وضع 'q r' بدلا من 'p' فتنتج لنا الصيغة الصحيحة الآتية:

q r v – (q r)

- إذا قلنا أن الصيغة 'p p̄' صيغة غير متسقة فإنه يمكننا وضع 'q v r' بدلا من 'p' فتنتج لنا الصيغة غير المتسقة الآتية:

"q v r. – (q v r)"

- أما في حالة الصيغ المتسقة فإن الأمر يختلف، فإذا كانت لدينا الصيغة 'p v p q' وهي صيغة متسقة، وأردنا تطبيق عملية الاستبدال ووضع 'r r̄' مكان 'p' فإن الصيغة التي ستنتج لدينا هي:

"r r̄ v r r̄ q"

وهي صيغة غير متسقة، وهذا دليل على عدم انطباق قاعدة الاستبدال على الصيغ المتسقة.

إننا إذا دققنا في خاصية الاستبدال التي حددها كواين لوجدنا أربعة أنواع على الأقل من الاستبدال، وهي:ـ

النوع الأول: استبدال حرف بآخر. وقاعدة هذه الحالة تشترط أنه إذا غيرنا حرفا بحرف آخر فإن هذا لا يتم بالنسبة لحرف واحد في الصيغة، وإنما يتم بالنسبة لكل الحروف المشابهة في الصيغة ذاتها، مثال ذلك الصيغ الآتية:

"p ⊃ q . q ⊃ r . ⊃ p ⊃ r"

فإذا رفعنا الحرف 'p' ووضعنا بدلا منه 's' فإن هذا الإجراء لا بد وأن

يتم في الصيغة كلها، فتصبح كما يلي:

$$“s \supset q . q \supset r . \supset s \supset r”$$

النوع الثاني: استبدال حروف بالصيغ. وهذا هو النوع الذي يعالجه كواين ويلاحظ فيه أن الاستبدال يصح بالنسبة للصيغ الصحيحة وغير المتسقة، أما الصيغ المتسقة فلا يصح الاستبدال فيها، ومرجع ذلك أن الصيغ الصحيحة وغير المتسقة تكون كذلك بموجب تعريف ثوابتها مهما تغيرت تآليف الصدق والكذب بالنسبة للمتغيرات أو الصيغ الجزئية التي تربط بها هذه الثوابت، أما الصيغ المتسقة فهي مقيدة نسبياً بتأليفات قيم الصدق والكذب الخاصة بمتغيراتها.

النوع الثالث: استبدال الصيغ بصيغ. ولا يصح تطبيق هذا النوع كقاعدة عامة، رغم وجود بعض الاستثناءات لذلك في حالة الصيغ المتكاملة منطقياً والتي يمكن أن نجري عليها عملية الاستبدال.

النوع الرابع: استبدال صيغ بالحروف. وهذا النوع يعد في حد ذاته أضعف أنواع الاستبدال ولا يمكن أن يؤخذ كقاعدة.

ثالثاً: التضمن

يرى كواين أن من أدق أهداف المنطق بحث فكرة التضمن وبيان كيف أن قضية ما تتضمن قضية أخرى. فإذا كانت لدينا القضية p والقضية q فإنه علينا أن نوضح كيف أن p تتضمن q. مثال ذلك القضية «الطلاب ليسوا أذكياء» تتضمن القضية «الطلاب ليسوا أذكياء ولا ناجحين». يمكننا ترجمة كل قضية بصورة رمزية على النحو التالي:

الطلاب أذكياء	نرمز لها بالرمز	p
الطلاب ناجحون	نرمز لها بالرمز	q

الطلاب ليسوا أذكياء — نرمز لها بالرمز — $\bar{p}$

الطلاب ليسوا أذكياء ولا ناجحين — نرمز لها بالرمز — $-(pq)$

الصيغة الرمزية للتضمن هنا يمكن تحديدها كما يلي:

$\bar{p}$' imples $-(pq)$

نجد أن هذه الصيغة صحيحة، ومن ثم فهي صيغة تضمن. إذن فالتضمن يعني أنه لا تكون هناك ترجمة تبين الصدق والكذب لتغيرات الشرط حيث تكون الصيغة التي تمثل المقدم صادقة، والصيغة التي تمثل النتيجة كاذبة في نفس الوقت. وعلى هذا الأساس فإن كواين ينظر للتضمن على أنه الصحة المنطقية للشرط، ويمكن لنا اختبار هذه الفكرة عن طريق تحليل قيم الصدق كما يلي:

$$\bar{p} \supset -(pq)$$

$$\bot \supset -(T\,q) \qquad\qquad T \supset -(\bot\,q)$$

$$T \qquad\qquad T$$

$$T$$

كذلك إذا أردنا أن نعرف ما إذا كانت الصيغة '$p \vee q . \supset p\,q$' هي صيغة شرط أو تضمن، نقوم بإجراء التحليل كما يلي:

$$p \vee q . \supset p\,q$$

$$\downarrow$$

$$T \vee q . \supset T\,q$$

$$q$$

$$T \qquad \bot$$

ويتوقف التحليل إذا وجدنا حالة واحدة يكون فيها مقدم الشرط صادقاً وتاليه كاذباً. ونتيجة التحليل تبين لنا بوضوح تام أن الصيغة ‹p v q› لا تتضمن الصيغة ‹p q›.

ولكن نأتي الآن للسؤال الهام: هل يرى كواين أن ثمة قواعداً للتضمن؟

يرى كواين أن التضمن له قواعد محددة، وهذه القواعد يمكن تحديدها كما يلي:

القاعدة الأولى: أي صيغة تتضمن ذاتها. فإذا كانت الصيغة صادقة كان الشرط كما يلي ‹T ⊃ T›، والشرط في هذه الحالة صحيح. أما إذا كانت الصيغة غير صحيحة فإن صورة الشرط في حالة كذب الثابت الرئيسي في الصيغة ‹⊥ ⊃ ⊥›، والشرط في هذه الحالة صحيح أيضاً، وهذا يعني أن أي صيغة لا بد وأن تتضمن ذاتها.

القاعدة الثانية: إذا تضمنت صيغة صيغة أخرى، وتضمنت هذه الأخيرة صيغة ثالثة، فإن الصيغة الأولى تتضمن الصيغة الثالثة.

القاعدة الثالثة: كل صيغة غير متسقة تتضمن كل الصيغ الممكنة سواء أكانت صحيحة أم متسقة أم غير متسقة، ولكن الصيغة غير المتسقة لا تتضمن إلا بواسطة صيغة غير متسقة.

القاعدة الرابعة: الصيغة الصحيحة لا تتضمن إلا الصيغة الصحيحة؛ ولكنها تتضمن بواسطة أي صيغة أخرى.

إلا أن كواين يرى أنه بالإضافة إلى هذه القواعد يمكن للرياضي أو المنطقي أن يعتمد على خياله ويستخدمه للتوصل إلى الصيغة أو الصيغ التي تنتج عن صيغة ما. فاذا كانت لدينا الصيغة ‹p v q›، فإنه يمكننا أن ندرك على الفور حالتين:

أ) الصيغ 'p'، 'q'، 'qp'، $\bar{p} \subset q$ تتضمن هذه الصيغة.

(ب) الصيغ 'p v q v r'، $\bar{p} \subset q$: تتضمنها الصيغة التي لدينا أيضاً.

ولكن يشترط الفهم الدقيق للقدرة على اكتشاف مثل هذه الصيغ أكثر من أي شيء آخر. كذلك فإن هناك بعض الصيغ التي يتضح لنا من مجرد تأملها أنها لا تكون صحيحة إلا بترجمة واحدة لمتغيراتها، وبقية تأليفاتها لا تحقق صحة الصيغة مثل الصيغة $\bar{p}\,q$. هذه الصيغة لا تكون صحيحة إلا إذا كانت 'p' صادقة، 'q' كاذبة. في فحص مثل هذه الصيغة ومحاولة معرفة ما إذا كان يلزم عنها صيغ أخرى أم لا، نقوم بالإجراء التالي: نضع مكان كل متغير في الصيغة الثانية (أي الصيغة التي تتضمنها الصيغة المعطاة) قيمة الصدق أو الكذب الخاصة بنفس المتغير في الصيغة الأولى والتي تحقق الحالة الوحيدة المعطاة للصحة بالنسبة للصيغة الأولى، ثم نطبق منهج تحليل قيم الصدق على الصيغة، فإذا نتجت لدينا 'T' أو صيغة صحيحة فإن معنى هذا أن الصيغة الأولى تتضمن الصيغة الثانية.

مثال: التضمن الآتي $p \supset q \mathbin{.} \supset r$، '$\bar{p}\,q$' implies نضع T مكان 'p'، ⊥ مكان 'q' فنحصل على النتيجة.

$$`T \supset \bot . \supset r'$$

وبتحليل هذه الصيغة نحصل على

$$T \supset \bot . \supset r$$

$$\bot \supset r$$

$$T$$

ومعنى هذه النتيجة أن التضمن صحيح.

كذلك إذا كانت هناك بعض الصيغ التي يبدو لنا من مجرد ملاحظتها

أن الثابت الرئيسي يصدق في حالة واحدة فقط فإن هناك نوعاً آخراً من الصيغ يتضح أنها تصبح كاذبة بترجمة واحدة فقط لمتغيراتها أما بقية التآليف الممكنة للتغيرات فتحقق صدق الثابت الرئيسي. فالصيغة (pq) - تكذب فقط إذا كان كل من 'p', 'q' صادقاً، أي T. كذلك إذا فحصنا الصيغة.

$$p \supset p . q \supset r \text{ implies } p \supset r$$

لوجدنا أن $r \supset p$ تكذب فقط إذا كانت 'p' هي 'T', 'r' هي '⊥' ثم نقوم بوضع T مكان 'p', '⊥' مكان 'r' في الصيغة $p \supset q . q \supset r$، فينتج لدينا:

$$T \supset q . q \supset \bot$$

$$\text{'}q\ \bar{q}\text{'}$$

وهي صيغة غير متسقة مما يدل على أن التضمن المطلوب اثباته صحيح.

إن التضمن كما يشير إليه كواين يعتبر كذلك من ناحية قيم الصدق، أي بناء على الاعتبارات المنطقية وحدها، ولذا فهو يميز بين التضمن implication وعلاقة الشرط 'if... then' فالتضمن هو الصحة المنطقية لعلاقة الشرط بين صيغتين.

* * *
* *

تلك هي آخر التطورات المنطقية التي لا زال البحث يدور حولها حتى يومنا هذا. وقد كشف مؤتمر سالزبورج الأخير الذي عقد في يوليو ١٩٨٣ عن استمرار المناطقة وعلماء الرياضيات في بحث بعض الموضوعات الجزئية لتطوير البحث المنطقي الرياضي بصورة تتسق مع التفكير المنطقي الرياضي ذاته.

كشاف الرموز

I — يقرأ universal Class وكان « بول » أول من استخدام هذا الرمز ليشير به الى « فصل كل الأشياء »، أي الفصل الكلي.

o — ويقرأ null Class وقد استخدمه « بول » للاشارة إلى الفصل الصفرى، أي « الفصل الذي عضوه لا شيء ».

⊂ — رمز الاحتواء inclusion.

∩ — يرمز إلى التقاطع intersection بين مجموعتين من الأشياء، ويعبر به عن حاصل الضرب المنطقي Logical prodcut.

∪ — يرمز إلى الاتحاد union بين مجموعتين من الأشياء، ويعبر به عن الجمع المنطقي Logical Sum.

⊢ — علامة رمز بها فريجه للتقرير assertion وتدل على أن القضية التي نتحدث عنها مثبتة أو مقررة.

~ — يشير هذا الرمز إلى النفي negation أو السلب ويقرأ «not».

. — يشير هذا الرمز إلى الوصل Conjunction ويقرأ «and».

V — يشير هذا الرمز إلى الفصل disjunction ويقرأ «or».

⊃ — يشير إلى التضمن implication ويقرأ «imply».

≡ — يشير هذا الرمز إلى التكافؤ equlvalence ويقرأ «equivalent».

/ — رمز يشير إلى عدم الاتفاق incompatibility ويقرأ Stroke.

⇔ — رمز يشير به بول إلى التضمن بين المجاميع ويقرأ imply.

¬ رمز يشير به أنصار المنطق الحدسي إلى النفي negation .

∧ رمز يشير به أنصار المنطق الحدسي الى الوصل Conjunction ويعرف برابط البدائل .

x رمز يشير إلى السور الكلي universal quantifier للقضية ، ويقابل في المنطق التقليدي كلمة كل . ويقرأ في كل قيم x .

∃x رمز يشير إلى السور الجزئي أو الوجودي existential للقضية ، ويقابل في المنطق التقليدي كلمة « بعض » . ويقرأ في بعض قيم x .

φ رمز رياضي مأخوذ من اليونانية ويقرأ phi .

ψ رمز رياضي مأخوذ من اليونانية ويقرأ phi .

χ رمز رياضي مأخوذ من اليونانية ويقرأ Chi .

θ رمز رياضي مأخوذ من اليونانية . ويقرأ thèta .

ε رمز رياضي يرمز به في نظرية حساب الفصول إلى عضوية الفرد في فصل ويقرأ epsilon .

− رمز للنفي في نظرية حساب الفصول ويقرأ not .

V رمز يشير به المذهب اللوجستيقي للفصل الكلي في نظرية حساب الفصول في مبادىء الرياضيات .

Λ رمز يشير به المذهب اللوجستيقي للفصل الصفري في إطار نظرية حساب الفصول .

∃ir رمز مستخدم في نظرية حساب الفصول ويرمز به لوجود الفصل ويقرأ a exists .

> رمز رياضي يشير إلى علاقة أكبر من ويقرأ greater than .

< رمز رياضي يشير إلى علاقة أصغر من ويقرأ less than .

V̇ رمز يستخدم في نظرية حساب العلاقات ويشير إلى العلاقة الكلية universal relation

$\dot{\Lambda}$ يشير هذا الرمز في نظرية حساب العلاقات إلى العلاقة الصفرية null relation.

$\dot{\exists}!R$ يشير هذا الرمز في نظرية حساب العلاقات إلى العلاقة التي تقوم بين زوج واحد من الحدود على الأقل ويقرأ R-exixts.

$\breve{R}$ رمز يشير إلى عكس العلاقة R ويقرأ R - Converse

D’R رمز يشير إلى ميدان العلاقة.

D’R رمز يشير إلى عكس الميدان.

C’R رمز يشير إلى مجال العلاقة.

R!S رمز يشير إلى حاصل الضرب النسبي لعلاقتين.

$(\phi \chi)$ يشير هذا الرمز في نظرية الأوصاف الى قيم $\hat{\chi}$ التي تحقق الدالة $\phi \hat{\chi}$

$E ! (1 \ \chi) \ (\phi \ \chi)$ يشير هذا الرمز في نظرية الأوصاف إلى وجود القيمة x التي تحقق الدالة $\phi \chi$ ويختلف معنى هذا الرمز عن الرمز $\exists$ المستخدم في نظرية حساب المحمول.

المصطلحات

- A -

Adjunction	التقرير اللاحق
Always true	صادق دائماً
Ambiguous	وصف مبهم
Antecedent	مقدم
Arithmatical proposition	قضية حسابية
Assertion	تقرير
Associative Law	قانون الترابط
Associative principle	مبدأ الترابط
Asymmetrical Relations	علاقات لا تماثلية
Axiomatized System	نسق بديهي
Atomic Proposition	قضية ذرية

- B -

Basic Symbols	رموز أساسية
Belonging	الانتماء

- C -

Calculus of class	حساب الفصول
Calculus of proposition	حساب القضايا
Categorical proposition	قضية حملية
Choice of Axioms	اختيار البديهات
Class	فصل
Classes of classes	فصول الفصول
Common-Sence	الفهم المشترك الشائع
Commutative	تبادلي
Completness	إتمام
Completely General Proposition	قضية عامة عمومية تامة
Complex Symbole	رمز مركب
Complementation	التتام
Concepts	تصورات
Conclusion	النتيجة
Conjunction	وصل
Copula	رابط
Corolaries	لواحق
Consistant	متسق
Consistency Relation	علاقة الاتساق
Contingent	حادث
Content	محتوى
Converse domain of Relation	الميدان العكسي للعلاقة
Contradictions	متناقضات
Converse of Relation	عكس العلاقات

- D -

Deductive System	نسق استباطي
Defined ideas	أفكار معرّفة
Definite description	اوصاف محددة
Definite	معين
Definition in use	التعريف في الاستعمال
De Morgan's Law	قوانين دي مورجان
Denoting phrase	عبارة دالة
Descriptions	الاوصاف
Disjunction	فصل
Distributive	توزيعي
Distributive Law	قانون التوزيع
Descriptive Function	دالة وصفية
Descriptive phrase	عبارة وصفية
Domain of Relation	ميدان العلاقة
Dissimilarity	عدم التشابه

- E -

Elementary propositions Function	دوال قضايا أولية
Elementary propositions	قضايا أولية
Empty Class	الفصل الفارغ
Equivalence	تكافؤ
Existential proposition	قضية وجودية

Exclusive disjunction	الفصل الاستبعادي
Existential quantifier	سور جزئي
Extention	ما صدق
External Relations	علاقات خارجية

- F -

Falsehood	الكذب
Field of Relation	مجال العلاقة
Formal Implication	التضمن الصوري
Formal Rules	قواعد صورية
Formal Sciences	العلوم الصورية
Formulaire de mathematique	الصيغ الرياضية (كتاب)

- G -

General proposition	قضية عامة
Geometrical System	نسق هندسي

- H -

Hypothetical Conjunction	قضية شرطية متصلة

- I -

Identity	الذاتية

Image	صوره
Immediate Inference	استدلالات غير مباشرة
Implication Relation	علاقة تضمن
Implication	تضمن
Imperfect Syllogism	قياس ناقص
Inclusion	الاحتواء
Individual Variables	متغيرات فردية
Individual	فرد
Indifinite	غير معين
Infintesimal Calculus	حساب اللامتناهي
Intermediate	شبه معين
Intersection	التقاطع
Idealism	مثالية
Infinite Classes	الفصول اللامتناهية
Impossible	مستحيل
Inconsistant Shcema	صيغ غير متسقة
Intention	مفهوم
Internal Relations	علاقات داخلية
Intransitive Relations	علاقات متعدية

- J -

Judgment	حكم

- K -

Knowledge by Aquaintance	معرفة بالاتصال المباشر

Knowledge by description	معرفة بالوصف

- L -

Laws of absorption	قوانين الامتصاص
Laws of tautology	قوانين تحصيل الحاصل
Logical basis	أسس منطقية
Logical connection	رابطة منطقية
Logical constants	ثوابت منطقية
Logical necessity	ضرورة منطقية
Logical Product	حاصل الضرب المنطق

- M -

Major term	الحد الاكبر
Major Premiss	المقدمة الكبرى
Many-valued Logic	منطق متعدد القيم
Material Implication	التضمن المادي
Mathematical Functions	دوال رياضية
Mathematical Constants	الثوابت الرياضية
Mathematical Logic	المنطق الرياضي
Meaningless	بلا معنى
Meaning and denoting	المعني والدلالة
Mediate Inference	استدلالات مباشرة
Meta-Logic	ما وراء المنطق
Meta-Mathematics	ما وراء الرياضيات

Middle term	الحد الاوسط
Minor term	الحد الاصغر
Minor premiss	المقدمة الصغرى
Modal Concepts	تصورات الجهة
Modal Logic	منطق الجهة
Modalities of Judgments	موجهات الأحكام
Modus tollendo tollens	النفي بالنفي
Modus tollendo ponens	الاثبات بالنفي
Modus ponendo tollens	النفي بالاثبات
Modus Ponendo ponens	الاثبات بالاثبات
Molecular proposition	قضية جزئية

- N -

Names	اسماء
Natural Sciences	العلوم الطبيعية
Necessary	ضروري
Negation	سلب
Non-euclidean geometry	هندسة لا امكيدية
Non-exclusive disjunction	الفصل الاستبعادي
Non-Symmetrical	جائز التماثل
Non-transitive Relations	علاقات جائزة التعدي
Number	عدد

- O -

Objective Content	المضمون الموضوعي

Ordinary Algebra	الجبر العادي
Object of Perception	موضوع الادراك
One - One Relation	علاقة واحدة ـ واحدة
Ontology	مبحث الوجود
Ordinary negation	النفي العادي
Ordinary Algebra	الجبر العادي

- P -

Paradoxes	مخالفيات
Paradoxical proposition	قضية مخالفية
Perfect Syllogism	قياس تام
Physics	الفيزياء
Postulates	مسلمات
Possible	ممكن
Predicative Function	دالة حملية
Predicative Variables	متغيرات فردية
Primitive propositions	افكار إبتدائية
Primitive ideas	قضايا إبتدائية
Principia Mathematica	مبادىء الرياضيات
Principles of Mathematics	أصول الرياضيات
Principle of Addition	مبدأ
Principle of assertion	مبدأ التقرير
Principle of Composition	مبدأ التركيب
Principle of Excluded Middle	مبدأ الثالث المرفوع

Principle of Exportation	مبدأ التصدير
Principle of Factor	مبدأ العامل
Principle of Identity	مبدأ الذاتية
Principle of Permutation	مبدأ التعديل
Principle of Importation	مبدأ الاستيراد
Principle of Simplification	مبدأ التبسيط
Principle of Summation	مبدأ الجمع
Principle of Syllogism	مبدأ القياس
Principle of tautology	مبدأ تحصيل الحاصل
Principle of Transposation	مبدأ النقل
Problem of decision	مشكلة القرار
Proper inclusion	الاحتواء التام
Property	خاصة
Propositional Function	دالة القضية
Pure Logical axioms	أصول منطقية بحته

- Q -

Quantifier	سور

- R -

Relation number	عدد العلاقة
Relative product	حاصل الضرب النسبي
Rule of Substitution	قاعدة التعويض

- S -

Selection Function	دالة الاختيار
Selection equation	معادلة الاختيار
Sence and Reference	المعنى والاشارة
Similarity of Relations	علاقة التشابه
Simplification	تبسيط
Singular proposition	قضية شخصية
Social Sciences	العلوم الاجتماعية
Some times true	صادق أحياناً
Square of Relation	مربع العلاقة
Strict implication	تضمن دقيق
Subject-Predicate proposition	قضية الموضوع ـ المحمول
Substitution	استبدال أو تعويض
Successor	تالي
Substitution of Schemata for letters	استبدال حرف بصيغة
Symbolism	الرمزية
Symbols	رموز
Symmetrical Relations	علاقات تماثلية

- T -

Tertium non datur	مبدأ الثالث المرفوع
Theorems	نظريات أو مبرهنات
Theoretical Logic	المنطق النظري

Theory of Appearent variables	نظرية المتغيرات الظاهرية
Theory of meaning	نظرية المعنى
Theory of Relations	نظرية العلاقات
Theory of Probability	نظرية الاحتمال
Truth	الصدق
Truth-value	قيمة الصدق

- U -

Union	اتحاد
Universal Class	فصل كلي
Universal Proposition	قضية كلية
Universal Quantifier	سور كلي
Universal Relation	علاقة كلية
Universal terms	حدود كلية

- V -

Values	قيم
Variables	متغيرات
Venn diagrams	أشكال فن

فهرست الموضوعات

القسم الثاني
مرحلة ما بعد برنكيبيا والتطور